
CUADERNILLO DE NIVELACIÓN MATEMÁTICA PARA IRRNN

ENCUADRE TEÓRICO Y EJERCICIOS PRÁCTICOS



Docentes:

Martín Torrellas – Sandra Campanella – Michael Cristaldo

Días y horario de clase: Lunes de 11hs a 13 hs.

Miércoles 12 hs. a 14 hs.

Jueves de 11 hs. a 13 hs.

TEMARIO:

- Números Reales
- Expresiones Algebraicas
- Proporcionalidad
- Función
- Trigonometría

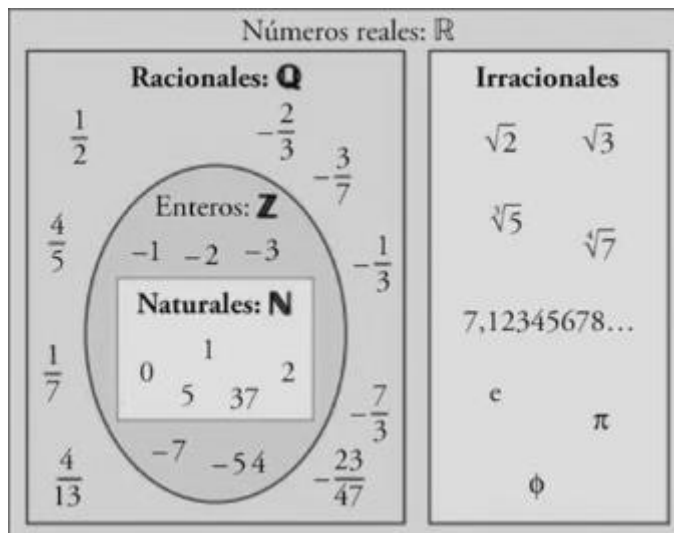
Metodología: teórico – práctica, a través de los encuadres teóricos y ejercitaciones previstas en este cuadernillo.

Evaluación: De carácter diagnóstico, sobre el final de curso de ingreso.

ANEXO I: Bibliografía.

1. Números reales:

Los números reales fueron creados para satisfacer necesidades especiales. Los números naturales son empleados en situaciones de conteo, los números negativos se vinculan a situaciones de deuda o temperaturas extremadamente frías, debajo de cero grados. Los números racionales hacen su aparición en casos de “medio kilo de pan” y los números irracionales para medir ciertas distancias, como ser la diagonal de un cuadrado.



Video sugerido: <https://www.youtube.com/watch?v=xOjQ3u7jSLQ>

1.1 Propiedades de los números reales:

Propiedad	Ejemplo	Descripción
Propiedades conmutativas $a + b = b + a$ $a \cdot b = b \cdot a$	$2 + 3 = 3 + 2$ $2 \cdot 3 = 3 \cdot 2$	Cuando se suman o multiplican dos números, no importa el orden
Propiedades asociativas $(a + b) + c = a + (b + c)$ $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$	$(2 + 4) + 7 = 2 + (4 + 7)$ $(6 \cdot 5) \cdot 4 = (5 \cdot 4) \cdot 6$	Cuando se suman o multiplican tres números no importa cuál de los dos se sume o multiplique primero.
Propiedad distributiva $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ $(b + c) \cdot a = a \cdot b + a \cdot c$	$2 \cdot (6 + 5) = 2 \cdot 6 + 2 \cdot 5$ $(6 + 5) \cdot 2 = 6 \cdot 2 + 5 \cdot 2$	Cuando se multiplica un número por una suma de dos números se obtiene el mismo resultado al multiplicar el número por cada uno de los términos y luego sumar los resultados.

Empleo de la propiedad distributiva: Ejemplos:

a) $2 \cdot (x + 3) = 2 \cdot x + 2 \cdot 3$

b) $(a + b) \cdot (x + y) =$

$= (a + b) \cdot x + (a + b) \cdot y$ propiedad distributiva

$= (ax + bx) + (ay + by)$ propiedad distributiva

$= ax + bx + ay + by$ propiedad asociativa de la suma

El 0 es especial para la adición. Se llama **elemento neutro** porque $a + 0 = a$ para cualquier $a \in R$. La sustracción es la operación inversa de la adición. Para restar un número de otro simplemente sumamos el negativo de ese número. Entonces:

$$a - b = a + (-b)$$

Para ello considerar las siguientes **propiedades de los negativos**:

Propiedad	Ejemplo
$(-1) \cdot a = -a$ $-(-a) = a$ $(-a) \cdot b = a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$ $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$ $-(a + b) = -a - b$ $-(a - b) = b - a$	$(-1) \cdot 3 = -3$ $-(-3) = 3$ $(-4) \cdot 3 = 3 \cdot (-4) = -(3 \cdot 4)$ $(-2) \cdot (-2) = 2 \cdot 2$ $-(2 + 4) = -2 - 4$ $-(3 - 6) = -3 + 6$

Ejemplos:

$$a) -(x + 2) = -x - 2$$

$$b) -(x + y - z) = -x - y - (-z) = -x - y + z$$

El número 1 es llamado **elemento neutro** porque $a \cdot 1 = a$.

Todo número real a distinto de 0 tiene un **inverso** en $\frac{1}{a}$ cumpliendo que $a \cdot \frac{1}{a} = 1$

La división es la operación inversa de la multiplicación. Para dividir un número multiplicamos por el inverso de ese número. Si $b \neq 0$, entonces queda $a : b = a \cdot \frac{1}{b}$

Si tomamos ahora $\frac{a}{b}$ nos referimos sobre esta expresión como el cociente de a y b : a es el numerador y b el denominador (divisor).

Propiedades de las fracciones:

Propiedad	Ejemplo	Descripción
$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$	$\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{7} = \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 7} = \frac{6}{35}$	Cuando se multiplican fracciones, se multiplican los numeradores y los denominadores
$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$	$\frac{2}{5} : \frac{3}{7} = \frac{2 \cdot 7}{5 \cdot 3} = \frac{14}{15}$	Cuando se dividen fracciones, se invierte el divisor y se multiplica.
$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a + b}{c}$	$\frac{1}{4} + \frac{6}{4} = \frac{1 + 6}{4} = \frac{7}{4}$	Cuando se suman fracciones con el mismo denominador se suman los numeradores.
$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}$	$\frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{2 \cdot 4 + 1 \cdot 3}{3 \cdot 4} = \frac{11}{12}$	Cuando se suman fracciones con denominadores diferentes, se busca un denominador común. Luego se suman todos los numeradores.
$\frac{a \cdot c}{b \cdot c} = \frac{a}{b}$	$\frac{5}{6} \cdot \frac{2}{2} = \frac{10}{12}$	Se anulan los números que son factores comunes en el numerador y en el denominador.
Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ entonces $ad = bc$	$\frac{2}{5} = \frac{4}{10}$ entonces $2 \cdot 10 = 5 \cdot 4$	

Video sugerido: <https://www.youtube.com/shorts/3lO1ndTZrKw>

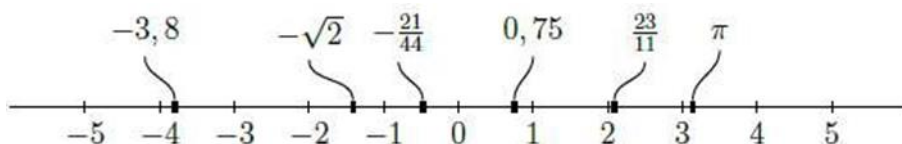
1.2 Empleo del MCM (mínimo común múltiplo):

En la suma $\frac{2}{5}$ y $\frac{3}{16}$ si factorizamos los denominadores, veremos que el primer denominador es un número primo por lo que $5 = 5^1$, pero en el caso de 16 queda: $16 = 2^4$. Determinamos el MCM multiplicando los factores de ambos números considerando la potencia de grado mayor de cada factor, quedando: $5^1 \cdot 2^4 = 80$.

$$\text{Entonces } \frac{2}{5} + \frac{3}{16} = \frac{2}{5} \cdot \frac{16}{16} + \frac{3}{16} \cdot \frac{5}{5} = \frac{47}{80}$$

1.3 La recta numérica:

Los números reales se pueden representar mediante puntos sobre una recta. La dirección positiva se señala por medio de una flecha. Se determina un punto de referencia 0 arbitrario, al que se llamará origen el cual corresponde con el número real 0. Se determina una unidad de medida cada número positivo x y se representa por un punto en la recta a una distancia de x unidades a la derecha del origen, y cada número negativo $-x$ se representa mediante un punto a x unidades a la izquierda del origen. El número asociado con el punto P se llama coordenada P y la recta recibe el nombre de eje de coordenadas o de recta real.



Es importante mencionar también que los números reales en la recta se disponen ordenadamente. Se dice que $a < b$ si $b - a$ es un número positivo. Desde una perspectiva geométrica, significa que ***a queda a la izquierda de b*** en la recta numérica. Significa lo mismo que decir que *b es mayor que a* y escribir $b > a$.

1.4 Conjuntos e intervalos:

Un conjunto es una colección de objetos, y dichos objetos se identifican como elementos del conjunto. Si M es un conjunto, la notación $a \in M$ significa que a es un elemento que pertenece a M y $b \notin M$, quiere decir que b no es un elemento de M .

Algunos conjuntos pueden ser expresados en la siguiente notación, por ejemplo:

$$A = \{2,3,4,5,6,7\}$$

O en la notación de conjuntos $A = \{x/x \in N \text{ y } 1 < x < 8\}$

Si A y B son conjuntos, se entiende por **unión** $A \cup B$ al conjunto que posee todos los elementos de A y B . La intersección $A \cap B$ consiste en todos los elementos que están tanto en A como en B .

El conjunto vacío, conjunto que no tiene elementos se denota $\emptyset$.

Ejemplo:

Si $A = \{1,2,3,4,5\}$ $B = \{4,5,6,7\}$ Y $C = \{6,7,8\}$, hallar $A \cup B$, $A \cap B$ y $A \cap C$.

$$A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,7\}$$

$$A \cap B = \{4,5\}$$

$$A \cap C = \emptyset$$

Notación:

Notación	Descripción del conjunto	Gráfica
(a, b)	$\{x \mid a < x < b\}$	
$[a, b]$	$\{x \mid a \leq x \leq b\}$	
$[a, b)$	$\{x \mid a \leq x < b\}$	
$(a, b]$	$\{x \mid a < x \leq b\}$	
(a, ∞)	$\{x \mid a < x\}$	
$[a, \infty)$	$\{x \mid a \leq x\}$	
$(-\infty, b)$	$\{x \mid x < b\}$	
$(-\infty, b]$	$\{x \mid x \leq b\}$	
$(-\infty, \infty)$	$\mathbb{R}$ (conjunto de todos los números reales)	

1.4 Valor absoluto:

El valor absoluto de un número a , denotado por $|a|$, es la distancia desde a hasta 0 sobre la recta de los números reales. La distancia es siempre positiva o cero, entonces $|a| \geq 0$ para cada número a .

Si a es un número real, entonces el valor absoluto de a se define como:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Ejemplo:

$$|3| = 3$$

$$|-3| = 3$$

$$|0| = 0$$

1.5 Exponentes y radicales:

1.5.1 Potencias:

Si a es un número racional y n un entero positivo, entonces la potencia n -ésima de a es:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ factores}}$$

Donde a es la base y n el exponente.

Ejemplos:

$$a) \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

$$b) (-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 16$$

$$c) -5^2 = -(5 \cdot 5) = -25$$

1.5.2 Propiedades de la potencia:

Propiedad	Ejemplo
$a^m a^n = a^{m+n}$	$2^2 \cdot 2^5 = 2^{2+5} = 2^7$
$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$\frac{5^5}{5^2} = 5^{5-2} = 5^3$
$(a^m)^n = a^{mn}$	$(3^2)^2 = 3^{2 \cdot 2} = 3^4$
$(ab)^n = a^n b^n$	$(4 \cdot 3)^2 = 4^2 \cdot 3^2$
$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	$\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{2^3}{5^3}$
$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$	$\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2$
$\frac{a^{-n}}{b^{-m}} = \frac{b^m}{a^n}$	$\frac{3^{-3}}{5^{-2}} = \frac{5^2}{3^3}$

Exponentes cero y negativo: Si $a \neq 0$ es un número real y n un entero positivo, se cumple:

$$a^0 = 1 \quad y \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

1.6 Notación científica:

En ciencias, es muy habitual expresar números muy grandes o muy pequeños en una notación mas reducida, llamada **notación científica**.

Se dice que un número positivo x está en notación científica si se expresa como:

$$x = a \cdot 10^n \quad \text{donde } 1 \leq a < 10 \quad \text{con } n \in \mathbb{Z}$$

Ejemplo:

$$40.000.000.000.000 = 4 \cdot 10^{13}$$

1.7 Radicales:

$$\sqrt[n]{a} = b \quad \text{significa} \quad b^n = a \quad \text{con } b \geq 0$$

La raíz n -ésima se define considerando que, si n es un entero positivo, entonces la raíz n -ésima principal de a se define como:

$$\sqrt[n]{a} = b \quad \text{quiere decir que} \quad b^n = a$$

Si n es par, entonces $a \geq 0$ y $b \geq 0$

1.7.1 Propiedades de la raíz:

Propiedad:	Ejemplo:
$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$	$\sqrt[3]{-8 \cdot 27} = \sqrt[3]{-8}\sqrt[3]{27} = (-2)(3) = -6$
$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	$\sqrt[4]{\frac{16}{81}} = \frac{\sqrt[4]{16}}{\sqrt[4]{81}} = \frac{2}{3}$
$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$	$\sqrt{\sqrt[3]{729}} = \sqrt[6]{729} = 3$
$\sqrt[n]{a^n} = a$ si n es impar	$\sqrt[3]{(-5)^3} = -5, \quad \sqrt[5]{2^5} = 2$
$\sqrt[n]{a^n} = a $ si n es par	$\sqrt[4]{(-3)^4} = -3 = 3$

1.8 Exponentes racionales:

Para cualquier exponente racional $\frac{m}{n}$ de los términos más bajos, donde m y $n \in \mathbb{Z}$ y $n > 0$, se define que:

$$a^{m/n} = (\sqrt[n]{a})^m \quad \text{o en forma equivalente} \quad a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$$

Si n es par, entonces es necesario que $a \geq 0$

Actividades prácticas:

- En cada una de las 3 filas del aula desde la fila de la pared hasta la de la ventana, hay 9 sillas.
 - ¿Cuántas hay en total?
 - Realizar un esquema donde se pueda ver la situación del punto anterior.
 - Dibujar otro esquema que muestre otra forma de acomodar las sillas, pero que en todas las filas se mantenga la misma cantidad de sillas.
 - ¿Cuántas camisas hay en los 23 estantes de una tienda de ropa, si en cada uno hay 14 camisas rojas, 15 azules y 10 verdes? Escribir el cálculo y resolver.
- Plantear en forma de cálculo y resolver aplicando propiedades.
 - Un grupo de 15 chicos y 13 chicas van a la pileta del club. Los días de semana la entrada cuesta 200 pesos. Los sábados y domingos los varones pagan 300 pesos y las chicas 200 pesos. ¿cuánto gastan si van todos juntos jueves, viernes y sábado?
 - Las cajas traen 12 tubitos de minas para lápiz. Las minas rojas cuestan 110 pesos cada tubito y las negras 100 pesos el tubito. Si compro 3 cajas rojas y 4 negras ¿cuánto gasto?
- Colocar $>$, $<$ o $=$, según corresponda:

$$\frac{4}{6} \dots \frac{2}{5}$$

$$b) \frac{5}{6} \dots \frac{1}{2}$$

$$c) \frac{1}{6} \dots \frac{2}{10}$$

- 4) Escribir en cada caso dos fracciones equivalentes, una de ellas debe ser irreducible:

a) $\frac{8}{14} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$ b) $\frac{2}{10} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$

c) $\frac{15}{25} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$ d) $\frac{8}{6} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$

- 5) Completa para que resulten fracciones equivalentes:

a) $\frac{2}{3} = \frac{\quad}{6} = \frac{\quad}{21}$

b) $\frac{12}{18} = \frac{\quad}{6} = \frac{\quad}{24}$

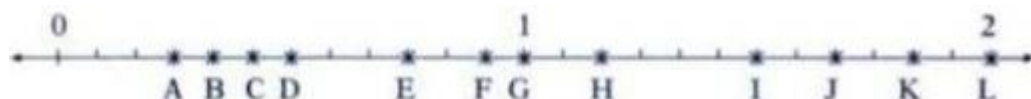
c) $\frac{7}{25} = \frac{\quad}{100} = \frac{\quad}{1000}$

d) $\frac{3}{2} = \frac{\quad}{10} = \frac{\quad}{100}$

e) $\frac{3}{7} = \frac{15}{\quad}$

f) $\frac{7}{8} = \frac{21}{\quad} = \frac{\quad}{200}$

- 6) Escribí debajo en cada paréntesis la letra correspondiente a cada fracción:



a) a) () $\frac{5}{12}$

b) () $\frac{7}{6}$

c) () $\frac{5}{3}$

b) d) () $\frac{1}{3}$

e) () $\frac{1}{2}$

f) () $\frac{11}{12}$

c) g) () $\frac{1}{4}$

h) () $\frac{36}{24}$

i) () $\frac{3}{3}$

- 7) Colocar >, < o = en cada inciso:

a) $\frac{3}{5} \dots \frac{3}{4}$

b) $\frac{7}{4} \dots \frac{14}{8}$

c) $1\frac{2}{3} \dots \frac{4}{3}$

d) $\frac{10}{6} \dots \frac{15}{9}$

- 8) Macarena compró una caja de alfajores blancos y negros. En la caja hay 75 alfajores, de los cuales $\frac{2}{5}$ son blancos.

a) ¿Cuántos alfajores son blancos?

b) ¿Qué fracción de alfajores no corresponde a los blancos?

- 9) Matías fue a comprar caramelos rellenos. La semana anterior cada uno costaba 12 pesos, pero hoy tuvo que pagar $\frac{5}{4}$ de ese precio. ¿Cuánto cuestan ahora los caramelos?

- 10) ¿Qué fracción de 1 kg de pan son 300 gramos?

- 11) Escribir con tus palabras: ¿cómo poder reconocer a simple vista si una fracción es mayor o menor que 1?

- 12) Sin hacer ninguna cuenta, escribir al final de cada pregunta:

a) ¿Cuánto menos que 1 es $\frac{11}{4}$?

- b) ¿Cuánto menos que 2 es $\frac{3}{2}$?
c) ¿Cuánto menos que 1 es $\frac{2}{5}$?

13) Resolver y escribí el resultado como fracción irreducible:

a) $1\frac{1}{6} + \frac{7}{3} =$ b) $\frac{11}{14} - \frac{2}{7} =$ c) $1\frac{2}{3} - \frac{5}{6} =$

c) $\frac{9}{8} + \frac{13}{8} - \frac{2}{8} =$ e) $\frac{1}{4} + \frac{5}{2} - \frac{5}{4} =$ f) $3 + \frac{2}{3} - \frac{5}{3} =$

g) $\frac{19}{10} - \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{4}\right) =$ h) $\frac{5}{4} + \frac{5}{18} - \frac{7}{12} =$ i) $\frac{8}{20} - \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{5}\right) =$

14) Ariel y Karina, al resolver $\frac{7}{9} \cdot 0,25$, obtuvieron diferentes resultados.

Ariel hizo $7:9 = 0,777$ y $0,777 \cdot 0,25 = 0,19425$

Karina hizo $\frac{7}{9} \cdot \frac{1}{4} = \frac{7}{36} = 0,19\hat{4}$

¿Cuál de los dos se equivocó? ¿Cuál fue su error?

15) Completar el cuadro:

Número	Redondeado a las unidades	Redondeado a los décimos	Redondeado a los centésimos	Truncado a los centésimos
4,637				
7,6				
2,881				

16) Verificar si la igualdad planteada en cada caso es verdadera o falsa. Resolver en cada caso.

- a) $(2 + 0,25 + 3)^2 = 2^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + 3^2$
b) $\left(2 \cdot \frac{1}{4} \cdot 3\right)^2 = 2^2 \cdot 0,25^2 \cdot 3^2$
c) $\left(\frac{1}{2}\right)^5 = (5)^{1/2}$

17) Resolver aplicando propiedades

- a) $0,4^7 \cdot 0,4 \cdot 0,4^2 =$
b) $\left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-1} \cdot \frac{2}{3} =$
c) $\left[\left(\frac{1}{7}\right)^3\right]^2 : \left[\left(\frac{1}{7}\right) : 7^{-3}\right]^{-1} =$

18) Calcular la raíz en cada caso:

- a) $\sqrt[3]{\frac{125}{8}} =$
b) $\sqrt[4]{\frac{1}{16}} =$
c) $\sqrt[3]{-\frac{64}{27}} =$

19) Resolver:

a) $\sqrt{9} + \sqrt{4} \cdot \sqrt{(1 - 0,75)^4} - \sqrt{\frac{1}{16}} =$

b) $\sqrt[3]{\frac{1}{5}} \cdot \sqrt[3]{\frac{8}{25}} + \sqrt[4]{\frac{1}{32}} : \sqrt[4]{\frac{1}{2}} =$

20) Expresar en notación científica los siguientes datos numéricos:

- a) Al nacer, el cerebro de un bebe contiene 100 000 millones de neuronas
- b) 1400 gramos es lo que pesa el cerebro humano
- c) Las moléculas de vapor de agua tienen 0,0000005 mm de diámetro

2. Expresiones Algebraicas:

Una **expresión algebraica** es una combinación de letras con números y números relacionados entre sí por una o más operaciones.

En una expresión algebraica, los números se denominan coeficientes y las letras con sus exponentes forman la parte literal.

Coeficiente → 5.b ← Parte literal

Cuando la expresión algebraica se encuentra formada por un término, se denomina **monomio**. Si posee dos términos se la llama **binomio**.

Dos monomios son *semejantes* cuando tienen la *misma parte literal*.

El *valor numérico de una expresión algebraica* se obtiene reemplazando todas las letras por números y luego resolviendo las operaciones.

Para $a = 1$ el valor numérico de $3a^2$ es $3 \cdot 1^2 = 3$

Las expresiones algebraicas $2 \cdot (a + b)$ y $2a + 2b$ son *equivalentes*, ya que para cualquier par de números racionales a y b , al reemplazarlos en cada una, se obtiene el mismo valor numérico.

Se puede escribir entonces:

$$2 \cdot (a + b) = 2a + 2b$$

Para sumar o restar monomios semejantes se suman y restan los coeficientes y se escribe a continuación la misma parte literal	Para multiplicar o dividir dos monomios, se multiplican o dividen los coeficientes y las partes literales
$4a + 6a = 10a$ $6b + 3a + b = 7b + 3a$	$4a^2 \cdot 3a = 12^3$

2.1 Propiedad distributiva en las expresiones algebraicas:

La multiplicación es distributiva con respecto a la suma y a la resta

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

$$c \cdot (a + b) = c \cdot a + c \cdot b$$

Ejemplos:

$$(4a + 3) \cdot 2a = 4a \cdot 2a + 3 \cdot 2a = 8a^2 + 6a$$

$$(3a + 1) \cdot (2a + 1) = 6a^2 + 2a + 3a + 1 = 6a^2 + 5a + 1$$

Las siguientes sumas se pueden expresar como un producto.

$$30 + 3 = 3 \cdot 10 + 3 \cdot 1$$

$$= 3 \cdot (10 + 1)$$

MCD entre 30 y 3; se denomina factor común

$$4a^2 + 2a^2 = 2 \cdot 2a^2 \cdot a + 2a^2$$

$$= 2a^2 \cdot (2a + 1)$$

Para obtener el factor común de la parte literal se escribe la letra que aparece en todos los términos con su menor exponente.

La división es distributiva solo cuando la suma o la resta están en el lugar del dividendo.

Una variable es una letra que representa cualquier número de un conjunto dado de números. Variables como x, y, z y algunos números reales, combinándolos por medio de la suma, resta, multiplicación, división, potencias y raíces, obtenemos una expresión algebraica.

Ejemplos:

$$x^2 - 2x + 1 \quad \frac{y+z}{y+2} \quad \sqrt{x} + 10$$

2.2 Polinomios:

Un polinomio en la variable x es una expresión de la forma:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0$$

Donde $a_0, a_1, \dots, a_n$ son números reales y n es un entero no negativo. Si $a_n \neq 0$, entonces el polinomio es de grado n . Los polinomios $a_k x^k$ son los términos del polinomio. El valor de a representa el coeficiente del término, siendo el coeficiente principal aquel valor de a vinculado al término que determina el grado del polinomio.

Polinomio	Tipo	Términos	Grado
$2x^2 - 3x + 4$	trinomio	$2x^2, -3x, 4$	2
$x^8 + 5x$	binomio	$x^8, 5x$	8
$3 - x + x^2 - \frac{1}{2}x^3$	cuatro términos	$-\frac{1}{2}x^3, x^2, -x, 3$	3
$5x + 1$	binomio	$5x, 1$	1
$9x^5$	monomio	$9x^5$	5
6	monomio	6	0

Adición y sustracción de polinomios:

Ejemplo:

- Realizar la suma: $x^3 - 6x^2 + 2x + 4) + (x^3 + 5x^2 - 7x)$
- Hallar la diferencia $x^3 - 6x^2 + 2x + 4) - (x^3 + 5x^2 + 7x)$

Solución:

$$\begin{aligned} \text{a) } & (x^3 - 6x^2 + 2x + 4) + (x^3 + 5x^2 - 7x) \\ &= (x^3 + x^3) + (-6x^2 + 5x^2) + (2x - 7x) + 4 \\ &= 2x^3 - x^2 - 5x + 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } & (x^3 - 6x^2 + 2x + 4) - (x^3 + 5x^2 - 7x) \\ &= x^3 - 6x^2 + 2x + 4 - x^3 - 5x^2 + 7x \\ &= (x^3 - x^3) + (-6x^2 - 5x^2) + (2x + 7x) + 4 \\ &= -11x^2 + 9x + 4 \end{aligned}$$

Producto de polinomios u otras expresiones algebraicas:

$$(a + b)(c + d) = a(c + d) + b(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Ejemplo:

$$(2x + 1)(3x - 5) = 6x^2 - 10x + 3x - 5$$

$$= 6x^2 - 7x - 5$$

Valor numérico de un polinomio:

El valor numérico de un polinomio es el resultado que se obtiene al sustituir las variables por números y resolver operaciones.

Raíz de un polinomio:

Un valor de x es raíz de $P(x)$ si y solo si $P(a) = 0$

Un polinomio de grado n tiene como máximo n raíces reales. Puede ocurrir que un polinomio tenga también alguna de sus raíces no reales.

Video sugerido: <https://www.youtube.com/watch?v=LJml6Pd7KQs&t=605s>

2.3 Factorización:

En ciertos momentos necesitamos dar acerca de una expresión algebraica, otra equivalente en productos de términos.

El caso más sencillo se presenta cuando debemos obtener factor/es común/es:

Ejemplo: Factorizar cada expresión:

$$a) 3x^2 - 6x \quad b) 2m^4y^3 + 6m^2y^2 - 2my^6 \quad c) (2x + 1) \cdot (x - 2) - 5(x - 2)$$

$$3x \cdot (x - 2) \quad 2my^2(m^3y + 3m - y^4) \quad (x - 2) \cdot [(2x + 1) - 5]$$

Expresiones de casos de factorización:

Expresión:	Nombre:
$A^2 + 2AB + B^2 = (A + B)^2$	Trinomio Cuadrado perfecto
$A^2 - 2AB + B^2 = (A - B)^2$	
$A^2 - B^2 = (A - B) \cdot (A + B)$	Diferencia de cuadrados
$A^3 - B^3 = (A - B) \cdot (A^2 + AB + B^2)$	Diferencia de cubos
$A^3 - B^3 = (A + B) \cdot (A^2 - AB + B^2)$	Suma de cubos

Ejemplos:

Factorizar cada caso:

a) $4x^2 - 25 = (2x - 5) \cdot (2x + 5)$ caso: diferencia de cuadrados

b) $27x^3 - 1 = (3x)^3 - 1^3 = (3x - 1) \cdot [(3x)^2 + 3x \cdot 1 + 1^2]$ caso: diferencia de cubos

c) $x^2 + 8x + 16$

En este caso, $A = x$, $B = 4$ y $2AB = 2 \cdot x \cdot 4$. Como identificamos que el primero, el segundo y el tercer término del trinomio dado se ajustan a la expresión de trinomio cuadrado perfecto, entonces escribimos:

$$x^2 + 8x + 16 = (x + 4)^2 \quad \text{caso: trinomio cuadrado perfecto}$$

Vídelo sugerido: <https://www.youtube.com/shorts/kRtB1h8rd7A>

<https://www.youtube.com/watch?v=9ZNZPOYvWc4&t=1207s>

Actividades prácticas:

Polinomio	Polinomio ordenado	Grado	Coefficiente principal	Término independiente
$R(x) = 3x + 0,5x^2 + 2$				
$P(t) = t^5 + 4t^3 - t^2 + \sqrt[3]{5}$				
$S(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3$				

1) Determinar valor numérico de cada polinomio dado:

- $T_1(s) = \frac{1}{2}s^2 + 6s + 3$ en $s = 0,5$
- $T_2(s) = -\frac{3}{2}s^4 + \frac{1}{2}s^3 + \frac{3}{2}$ en $s = -1$
- $T_2(s) = 2s^6 - s^3 - 2$ en $s = \sqrt[3]{5}$

2) Determinar el coeficiente del polinomio $J(x) = -\frac{4}{5}x^4 - ax^2 - 3x + 1$ teniendo en cuenta que $J(-2) = 0$

3) Dado $A(x) = x^2 - 2x + 1$, $B(x) = x - 1$, $C(x) = x^3 - 1$, resolver:

- $A(x) + B(x) - C(x)$
- $A(x) \cdot B(x) + C(x)$
- $[C(x) - 2B(x)] - A(x)$
- $\{A(x) - [B(x)]^2\} \cdot C(x)$

4) Determinar el valor de k en los polinomios $M(x)$ y $N(x)$ para que se cumpla la condición dada en cada caso:

- $M(x) = kx^3 + 2x + 2$ para que -1 sea raíz de $M(x)$
- $N(x) = x^2 + kx - 1$ para que 2 sea raíz de $N(x)$

5) Indicar verdadero o falso en cada inciso. Justificar.

- $(x + 1)$ es divisor de $x^2 + 2x + 1$
- $(2x^3 + 6x^2 + 4x)$ divide a $(x^2 + 3x + 2)$

c) El resto de dividir $(x^5 - 32)$ por $(x - 2)$ es -2

6) Factorizar

a) $64x^2 - 48x + 9 =$

b) $4x^3 - \frac{4}{3}x^4 + \frac{1}{9}x^5 =$

c) $64x^2 - 48x + 9 =$

d) $5x^2 + 5x + 1,25 =$

e) $\frac{15}{16}x^4 - \frac{21}{40}x^3 - \frac{9}{28}x =$

f) $3x^2 - 27$

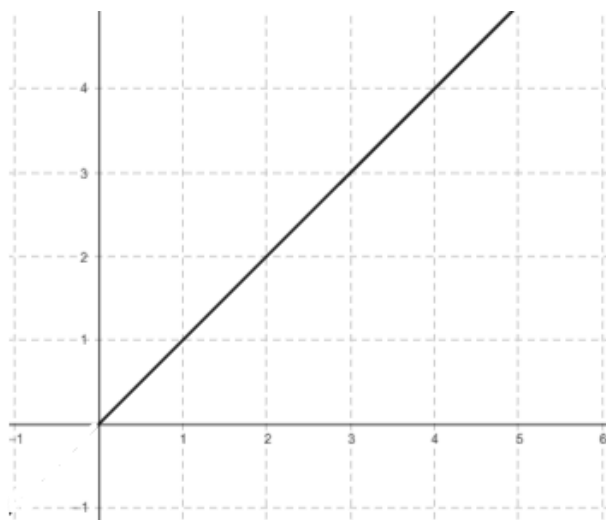
g) $5x^4 - 5x =$

3. Proporcionalidad:

3.1 Función de proporcionalidad Directa:

Cuando dos o más variables se relacionan de tal manera que al modificarse una también lo hace la otra en la misma proporción, la relación entre ellas es **directamente proporcional**.

Los puntos que corresponden a un gráfico de una función de proporcionalidad directa siempre están sobre una recta que pasa por el origen de coordenadas del sistema: $(0; 0)$.

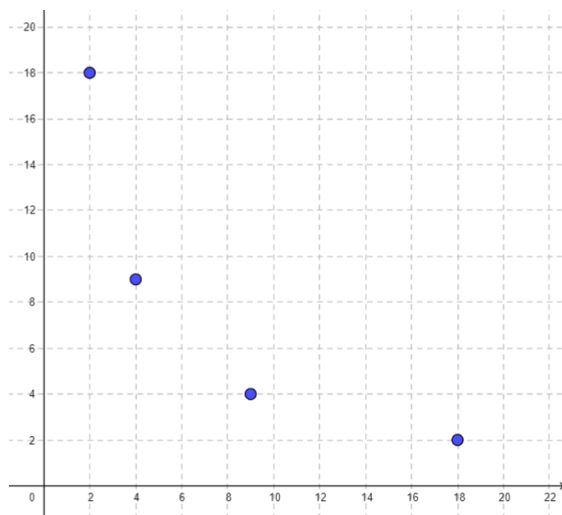


Representación gráfica posible.

3.2 Función de proporcionalidad Inversa:

Supongamos el siguiente caso:

“Juli quiere comprarle a su Mamá un regalo que cuesta \$36. Decide ahorrar todos los días la misma cantidad de dinero, o sea que la cantidad de días que va a demorar en juntar los \$36 esta en función de lo que ahorre cada día”. A continuación, se aprecia la gráfica:



La unión de los puntos describe la gráfica de la situación.

El ahorro diario y la cantidad de días se relacionan de **manera inversamente proporcional**, porque al aumentar el ahorro diario, la cantidad de días disminuye en la misma proporción: al doble de ahorro, la mitad de días. Al triple de ahorro, la tercera parte de días.

Los puntos que corresponden al gráfico de una **función de proporcionalidad inversa** pertenecen a una línea curva que se llama **hipérbola**.

3.3 Mas sobre proporcionalidad: Un caso de proporcionalidad directa

En la balanza digital de una panadería se ven como cambia el importe a pagar a medida que se agrega o quita pan del plato. La balanza relaciona la cantidad que se pesa y el importe, de manera que internamente multiplica el precio del kilogramo por la cantidad de pan que se registra en ese momento.

Teniendo en cuenta la siguiente tabla (incompleta)

Cantidad de pan (kg)	2		6	1		8	10
Importe (\$)		18		4,5	22,5		

¿Como se podría determinar la razón entre cada par de valores que se corresponden en la tabla?

La **cantidad** y el **importe** se relacionan de manera **directamente proporcional**: al aumentar la cantidad de pan al doble, el importe se duplica; si la cantidad de pan se triplica, el importe también.

Cuando dos variables se relacionan de manera directamente proporcional, **la razón** entre sus valores correspondientes **es constante**.

Si se llama **x** e **y** a esas variables, entonces $\frac{y}{x} = k$

El valor de **k** se llama **constante de proporcionalidad directa**.

Los números racionales a, b, c y d forman una **proporción numérica** si,

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \quad \text{con } b \text{ y } d \text{ distintos de } 0$$

Video sugerido: https://www.youtube.com/watch?v=B3_-MhYEKek

Un caso de proporcionalidad inversa:

Un pedido de empanadas será envasado en cajas; en cada caja se pondrá la misma cantidad de empanadas.

Empanadas por caja	2	4		8	12		
Número de cajas	36		12			4	3

La **cantidad de empanadas por caja** y el **número de cajas** se relacionan de manera inversamente proporcional: al aumentar las empanadas por caja al doble, la cantidad de cajas se reduce a la mitad; si la cantidad de empanadas es el triple, la cantidad de cajas se reduce a la tercera parte. Cuando dos variables se relacionan de manera inversamente proporcional, **el producto** entre los pares de valores es **constante**.

Si se llama x e y a esas variables, entonces $x \cdot y = k$

El valor de k es la **constante de proporcionalidad inversa**.

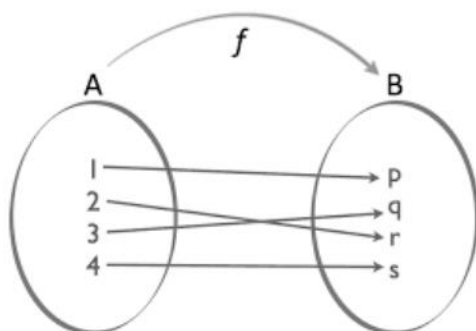
Video sugerido: <https://www.youtube.com/watch?v=Vp85Jzpk4Fo>

4. Función:

Una función f de un conjunto X en otro Y es una correspondencia que asigna a cada elemento x de A exactamente un elemento y de B . Entonces, se dice que y es la imagen de x bajo f , declarado como $f(x)$.

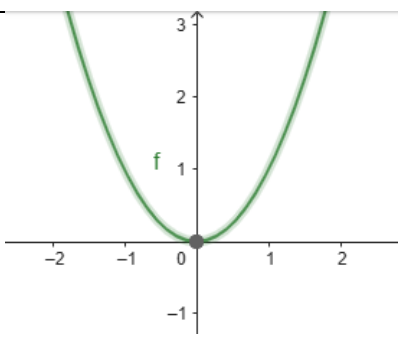
El **dominio** de $f(x)$ es el conjunto A y el **codominio** el conjunto B . Los elementos de B que se constituyen en elementos de efectivos de llegada, componen la **imagen** de A .

Si a cada valor de su imagen se corresponde exactamente un elemento de su dominio, la función se llama **inyectiva**. Y si la imagen de f es todo el conjunto B , la función se llama **sobreyectiva**, y **biyectiva** cuando la función es inyectiva y sobreyectiva.



Video sugerido: <https://www.youtube.com/watch?v=eViT5wKoN-Q>

Algunas formas en las que puede presentarse una función. Campo de representación:

Analítica (algebraico)	Gráfica	Tabla (aritmético)								
$y = f(x) = x^2$		<table><tr><th>x</th><th>y</th></tr><tr><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>-1</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td></tr></table>	x	y	1	1	-1	1	0	0
x	y									
1	1									
-1	1									
0	0									

Sea $f: A \rightarrow B / y = f(x)$

Las funciones se clasifican en Algebraicas y Trascendentes.

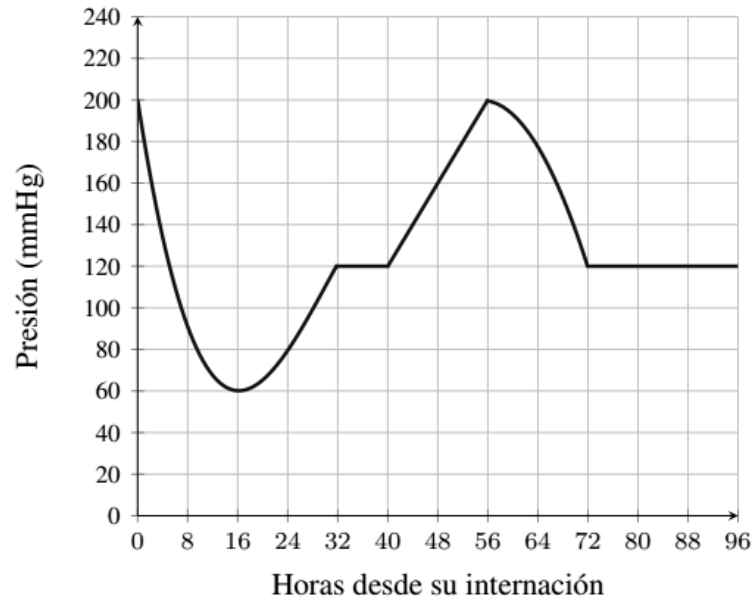
Las raíces de una función se determinan considerando $f(x) = 0$

Video sugerido: <https://www.youtube.com/watch?v=ojiMGOqwwCE>

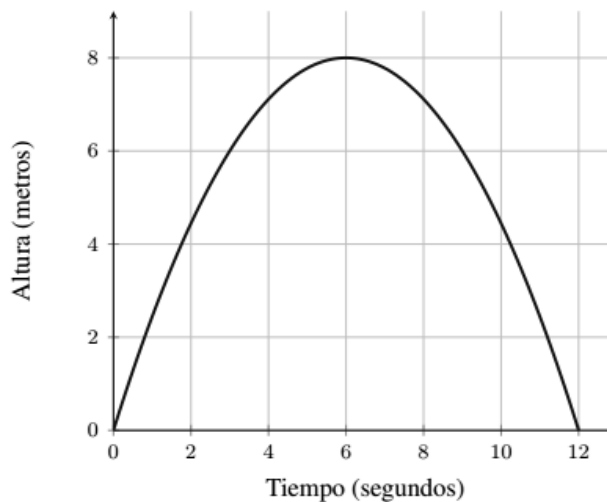
Actividad práctica:

- 1) A continuación, figuran una serie de enunciados. ¿Qué tipo de proporcionalidad existe en cada caso? Resolvé.
 - a) Si 6 kg de ciruelas cuestan 210 pesos ¿Cuánto debo pagar por 2kg?
 - b) En un pendrive puede almacenarse 15 videos musicales de 5 min de duración cada uno. ¿Cuántos temas que duren 2 minutos cada uno entrarán?
 - c) Un ascensor soporte 7 personas de 80 kg cada una. ¿Cuántas personas de 70 kg pueden subir?
 - d) Con 24 vasos iguales se pueden llenar 3 jarras. ¿Cuántas pueden llenarse con 120 de esos mismos vasos?

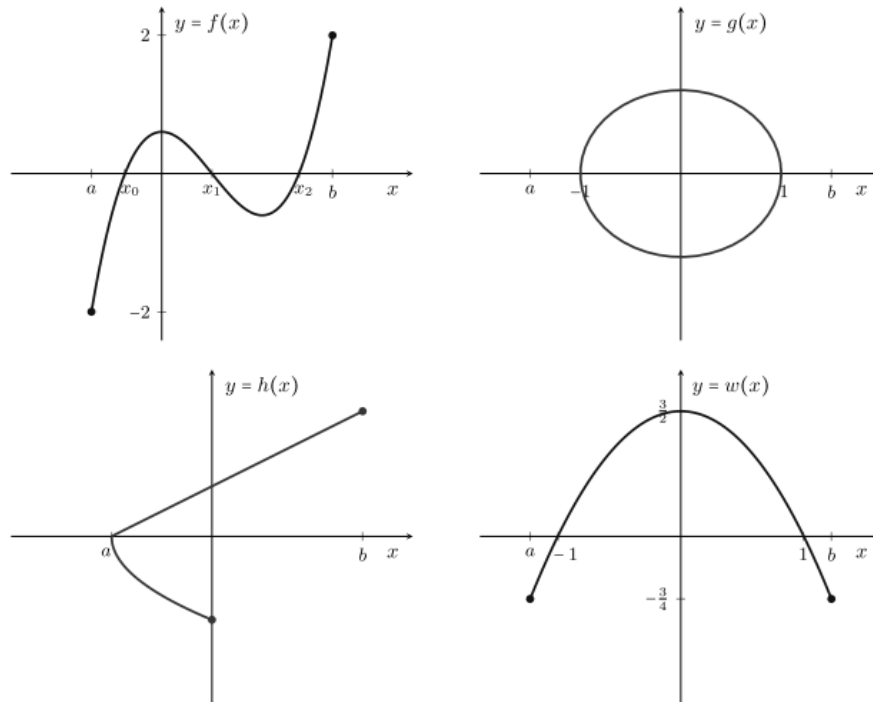
- 2) Supongamos que el grafico representa los registros de la presión arterial (en milímetros de mercurio, denotados como mmHg) de un paciente durante un período de tiempo medido en horas. En el eje horizontal se representan las horas transcurridas desde su internación, y en el vertical, la presión del paciente en cada instante de tiempo (en mmHg). Las mediciones comienzan un lunes a las 7 de la mañana (lo que consideramos como tiempo $t = 0$), momento en el que el paciente queda internado. Observando el grafico, determinar:
 - a) ¿Que presión tenía el paciente al momento de la internación?
 - b) ¿Durante cuánto tiempo se tomaron las mediciones?
 - c) ¿Que presión tenía el paciente el miércoles a las siete de la mañana? ¿En cuantos momentos tuvo la misma presión?
 - d) ¿Cuál fue la presión mínima y cuando la alcanzó? ¿Y la máxima?
 - e) ¿En qué momento la presión fue en aumento? ¿Y en disminución?
 - f) ¿En qué momento la presión se mantuvo constante y cual fue ese valor?



- 3) La grafica corresponde a la altura de un objeto en función del tiempo transcurrido, desde el momento de su lanzamiento hasta que llega al suelo. Observando el grafico, determinar:
- ¿Cuánto tiempo demora el objeto en llegar al suelo?
 - ¿Cuál fue la altura máxima alcanzada, y en qué momento la alcanzo?
 - ¿A que altura se encontraba a los 3 segundos luego de su lanzamiento? ¿Alcanzo esa altura en algún otro momento?
 - ¿En qué momentos se encontraba a una altura aproximada de 7 metros?



- 4) Determinar si los gráficos en la figura siguiente corresponden o no a funciones con dominio $[a,b]$. En caso de no serlo, indicar qué condiciones no se cumplen. En caso de serlo, determinar su imagen y raíces, si las tiene.



5) Mediante el uso de tabla de valores, graficar las siguientes funciones:

- a) $y=3x+2$
- b) $y=5x^2-9$
- c) $y=\log(x)$

5. Trigonometría:

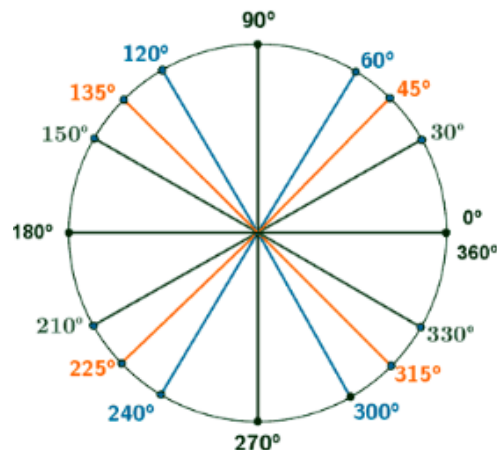
La **trigonometría** es una rama de la matemática cuyo significado etimológico es 'la medición de los triángulos'. Deriva de los términos griegos $\tau\rho\iota\gamma\omega\nu\omicron\varsigma$ (*trigōnos*) 'triángulo' y $\mu\epsilon\tau\rho\omega\nu$ (*metron*) 'medida'.

5.1 Sistemas de medición angular:

Sistema Sexagesimal, en el cual la unidad de medida angular es el grado, considerando que:

$$1^\circ = 60' \text{ y } 1' = 60''$$

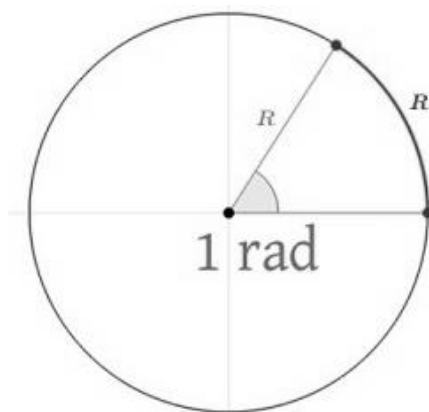
Identificación de ángulos medidos en grados en la circunferencia



Para la expresión de un ángulo en grados, minutos y segundos, se aplica la regla de tres simple.

En el **sistema radial**, la unidad de medida es el radián, el cual ocurre cuando la longitud del arco que describe un ángulo en la circunferencia, es igual al radio.

Angulo de amplitud 1 radián. Aquí se representa como igual la longitud del arco R con el radio de la circunferencia.



5.2 Relaciones de equivalencias entre los dos sistemas:

De la definición de grado y radián vemos que,

$$1 \text{ giro} = 2\pi \text{ radián} = 360^\circ$$

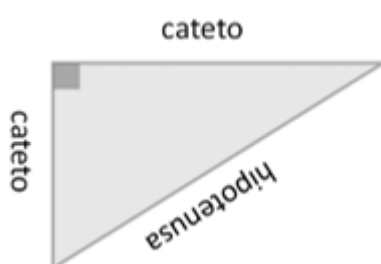
$$1 \text{ ángulo llano} = \pi \text{ radián} = 180^\circ$$

$$1 \text{ ángulo recto} = \frac{\pi}{2} \text{ radián} = 90^\circ$$

Para establecer equivalencias entre los dos sistemas se emplea proporcionalidad directa, sabiendo 1 radián equivale aproximadamente a 57,296°.

Video sugerido: https://www.youtube.com/watch?v=PKeUzxt-C_k&t=163s

5.3 Razones trigonométricas de triángulos rectángulos:



En triángulos rectángulos, las razones trigonométricas del seno, el coseno y la tangente pueden ser empleadas para determinar el valor de los ángulos y las longitudes desconocidas. EL cateto opuesto es el lado opuesto al ángulo considerado.

$\text{sen } \alpha = \frac{\text{opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{c}$	$\text{cosec } \alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{opuesto}} = \frac{c}{a}$
$\text{cos } \alpha = \frac{\text{adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{c}$	$\text{sec } \alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{adyacente}} = \frac{c}{b}$
$\text{tan } \alpha = \frac{\text{opuesto}}{\text{adyacente}} = \frac{a}{b}$	$\text{cotan } \alpha = \frac{\text{adyacente}}{\text{opuesto}} = \frac{b}{a}$

5.4 Teorema de Pitágoras:

En todo triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

$$H^2 = A^2 + B^2$$

Video sugerido: <https://www.youtube.com/watch?v=4I6YlccTkA>

Ejercitación Práctica:

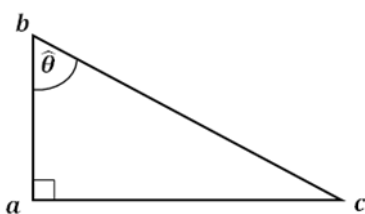
- Transforme cada uno de los siguientes ángulos a radianes o grados, según corresponda:

a) 15°	b) $\frac{3\pi}{4} \text{ rad}$	c) $5\pi \text{ rad}$	d) 150°
e) $\frac{7}{6}\pi \text{ rad}$	f) 35°	g) 60°	h) $\frac{\pi}{10} \text{ rad}$
- Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique cada respuesta.

a) $126^\circ 6' = 756'$	b) $20' 52'' = 1252''$	c) $52^\circ = 302'$
--------------------------	------------------------	----------------------
- Utilizando la calculadora, determine los valores de las siguientes razones trigonométricas, redondeando el resultado a cuatro decimales.

a) $\sin(36^\circ 35' 47'')$	b) $\cos(83^\circ 13' 11'')$	c) $\tan(81^\circ 22')$	d) $\sin(45^\circ)$
------------------------------	------------------------------	-------------------------	---------------------
- Utilizando la calculadora, determine la amplitud de los ángulos (en grados y en radianes) correspondientes a las siguientes razones trigonométricas.

a) $\sin(\hat{\alpha}) = 0,3456$	b) $\cos(\hat{\beta}) = 0,5555$	c) $\tan(\hat{\gamma}) = 1,4572$	d) $\cos(\hat{\theta}) = 0,25$
----------------------------------	---------------------------------	----------------------------------	--------------------------------
- Resolver los triángulos rectángulos para los datos dados. Usar calculadora.

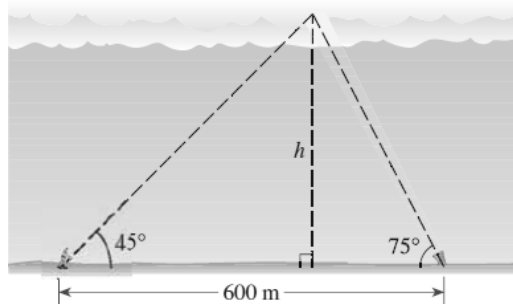


a) $\hat{\theta} = 24^\circ$	y	$\overline{ac} = 16$
b) $\overline{ca} = 40$	y	$\overline{bc} = 41$
c) $\hat{\theta} = 68^\circ$	y	$\overline{bc} = 1000$
d) $\hat{\theta} = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$	y	$\overline{ab} = 72,3$
e) $\overline{ca} = 8$	y	$\overline{bc} = 15$
f) $\hat{\theta} = 81^\circ 12'$	y	$\overline{ab} = 43,6$

6) Resolver y graficar la situación planteada:

- Una escalera de 20 m se apoya contra un edificio de modo que el ángulo entre el suelo y la escalera es de 72° . ¿A qué altura llega la escalera sobre el edificio?
- Un árbol de 96 m proyecta una sombra de 120 m de largo. ¿Cuál es el ángulo de elevación del Sol?

- c) Desde un barco se ve el punto más alto de un acantilado con un ángulo de 74° sabiendo que la altura del acantilado es de 200 m ¿A qué distancia se halla el barco del pie del acantilado?
- d) Claudio observa una antena desde la orilla opuesta de un río, mide un ángulo que forma su visual con el punto más alto de la antena y obtiene 43° . Retrocede 10 m y mide un nuevo ángulo obteniendo un resultado de 35° . ¿Qué altura tiene la antena?
- e) Una aeronave vuela a una altura de 5150 m directamente arriba de una carretera recta. Dos automovilistas conducen en la carretera en lados opuestos del avión, y el ángulo de depresión respecto a un automóvil es 35° y respecto al otro es 52° ¿Cuál es la distancia que separa a los automóviles?
- f) Si ambos automóviles de la situación anterior están en un lado del avión y si el ángulo de depresión respecto a un automóvil es de 38° y respecto al otro es de 52° ¿qué tan separado están los automóviles?
- g) Para medir la altura de una montaña se miden los ángulos de elevación desde dos puntos distantes 480 m y situados a 1200 m sobre el nivel del mar cuál es la altura si los ángulos son 45° y 76° .
- h) Para medir la altura de la cubierta de nubes en el aeropuerto Chapelco, un trabajador dirige un reflector hacia arriba a un ángulo de 75° desde la horizontal. Un observador a 600 m mide el ángulo de elevación hasta el punto de luz y encuentra que es de 45° . Determinar la altura h de la cubierta de nubes.



Anexo I

Bibliografía:

Tapia, N, Bibliloni, Tapia, C. (1992) Matemática 3, Editorial Estrada

Kaczor, P, Schamposchnik, R, Franco, E, Cicala, Rosa, Diaz, V. (2005). Matemática I, Editorial Santillana.

Bocco, M. (2012) Funciones elementales para construir modelos matemáticos, Colección Cs nat. y matemática.

Carena Marilina, Manual de Matemática preuniversitaria: edición ampliada y corregida. 2da ed. Santa Fe: Ediciones UNL, 2021.

Berman A, Dacunti, D, Perez, M, Veltri, A. (2008). Matemática II, Editorial Santilana.

Torrellas M, Campanella, S, Cristaldo, M. (2024). Cuadernillo Matemática I, UNCo – AUSMA.

Cuadernillo Matemática curso de ingreso 2014 teórico. (2014). UTN FRCh

Cuadernillo curso de apoyo en matemática. Universidad San Juan Bosco. Facultad de ingeniería.

Departamento de Matemática. Cuadernillo curso de nivelación matemática. (2016). UNS