UNIVERSIDAD NACIONAL DEL COMAHUE
ASENTAMIENTO UNIVERSITARIO SAN MARTIN DE LOS ANDES

Curso de Nivelación en Matemática

2025

Para la carrera:

- ✓ Tecnicatura Universitaria Forestal
- ✓ Tecnicatura Universitaria en Espacios Verdes

Aut: Prof. Dello Russo María Laura

Introducción

Bienvenidos al curso de nivelación de matemática para las carreras de Técnico Universitario Forestal y Técnico Universitario de Espacios Verdes de la Universidad Nacional del Comahue.

Este curso consta de siete clases de dos horas cada una, en donde desarrollaremos los temas del cuadernillo y un último encuentro donde se evaluará en forma escrita los contenidos trabajados.

Los apuntes han sido pensados para ayudarte a recuperar y consolidar los conocimientos matemáticos que seguramente adquiriste en el nivel medio, y que son la base para afianzar otros más complejos relacionados con la profesión que elegiste.
Para que podamos alcanzar este propósito es necesario que emprendas esta nueva etapa con responsabilidad y compromiso, sabiendo que nada es posible sin esfuerzo y que nada es tan difícil, incomprensible o inalcanzable como parece, sólo se necesita constancia, paciencia y horas de estudio.

Son objetivos de este curso que te habitúes a los tiempos disponibles en la universidad para estudiar un tema, que siempre son breves, y que fortalezcas tu capacidad de resolver problemas de la manera más conveniente y en el menor tiempo posible, por lo que esperamos que aproveches los horarios de clase para completar aquellos ejercicios en que hayas tenido inconvenientes y verifiques los resultados que obtuviste, y no para comenzar a resolverlos recién en la clase.

Cada persona tiene una modalidad de estudio, de trabajo. Sin embargo, te recomendamos que sigas el orden en que están presentados los temas y que trates de resolver la guía de ejercicios de cada uno de ellos. Es posible que aparezcan dificultades, no te desanimes y vuelve a intentarlo. Si aún no llegas a la solución, anota las dudas y busca ayuda, un profesor o un compañero pueden brindártela. Seguí adelante, todo es posible, sólo hay que intentarlo.

El estudiante que apruebe el examen final de este curso, sumará 5 puntos en el primer parcial de matemática. La puntuación de un examen es de 100 puntos y se aprueba con 60 puntos o más.

Números Reales

En distintas partes del mundo y en diferentes épocas, los seres humanos crearon diversos tipos de números, cuyos usos fueron ampliando a medida que se complejizaron las actividades de las personas. Con el devenir de los avances científicos, los matemáticos clasificaron los números y los organizaron formalmente en conjuntos, que aún hoy siguen investigando. Uno de estos conjuntos numéricos es el de los números reales.

Los números reales se conforman con la unión de dos conjuntos: El conjunto de los números racionales (aquellos que pueden ser expresados como el cociente entre dos números enteros) y el conjunto de los números irracionales (aquellos que no pueden se expresados como el cociente entre dos números enteros y tienen infinitas cifras decimales no periódicas).

Haremos un repaso de estos conjuntos numéricos, sus operaciones y propiedades.

De los Naturales a los Reales (Un breve repaso)

El Conjunto de los Números Naturales [$\mathbb{N}$]:

Los números naturales son los números que se utilizan para contar. Se considera que el cero no pertenece a este conjunto, pues empezamos a contar desde el 1. Queda marcado acá que el 1 es el primer elemento de este conjunto, ¿Podrías escribir el último elemento de este conjunto?...

Luego: $\mathbb{N} = \{1,2,3,4,5, \ldots \ldots\}$

Actividad 1:

1. Resolver las operaciones:
   a. $(621:9+21).3+310 =$
   b. $(77.8+99:11).2+4.(5-1) =$
   c. $(\sqrt[3]{8}.\sqrt[3]{27})^3.4^3 =$
   d. $\left(\sqrt{16}+9^2:3^3\right).54^0-7^1 =$

2. Escribir el cálculo y resolver:
   a. La raíz cuadrada del doble de noventa y ocho.
   b. La suma entre la raíz cúbica de veintisiete y la raíz cuadrada de veinticinco.
   c. La diferencia entre el cuádruple de cinco y la raíz cuadrada de cuarenta y nueve.

3. Los alumnos dibujaron sobre un papel afiche un tablero cuadrado que está dividido en 64 cuadraditos iguales, cada uno de $100cm^2$ de área. ¿Cuántos cuadraditos tiene cada lado del tablero? ¿Cuánto mide cada lado del tablero?

4. Verdadero o falso:
   a. 14 es el mínimo común múltiplo entre 2 y 7.
   b. 6 es divisor de 2.
   c. 30 es múltiplo de 2, 3, 5 y 6.
   d. 39.63 es múltiplo de 7.
   e. 35.24+1 es múltiplo de 5.

5. Descomponer como producto de números primos a los números:
   a. 60 b. 38 c. 45 d. 24 e.120 f. 41

El conjunto de los Números Enteros [$\mathbb{Z}$]:

Cada número entero puede pensarse como la resta de dos naturales; o sea, si a un número natural se le resta otro natural, siempre se obtiene un entero.

Ejemplos:

7 – 3 = 4.   2– 8 = -6.   12 – 12 = 0.

Luego el conjunto de los enteros está formado por: Los números naturales, sus opuestos y el cero. Es decir: $\mathbb{Z} = \{\ldots.-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,\ldots..\}$

Actividad 2:

1. Expresar los números enteros -5, 3, 0, 18, -25 como diferencia de dos números naturales.

2. Completar la tabla:

a	b	$-a+b$	$(a+b)^2$	$-3a^3-b$	$-b-2a^2$
-2	-5				
-1				-4	
	9	11			
-3					-10

3. Los siguientes cálculos están resueltos de modos diferentes y se obtuvieron dos resultados distintos; esto es un absurdo. Lo que ocurre es que uno está hecho de manera correcta y en el otro no se respetan la separación en términos ni otras propiedades de las operaciones. Indiquen cuáles son los cálculos correctos.

$8+5.(-3)=13.(-3)=-39$ $8+5.(-3)=8-15=-7$	$5-(-2)^2+(-3)^2=5+4-9=0$ $5-(-2)^2+(-3)^2=5-4+9=10$
$(7+4)^2=11^2=121$ $(7+4)^2=7^2+4^2=49+16=65$	$16:2+7.3=8+21=29$ $16:2+7.3=15.3=45$

4. Agregar los paréntesis necesarios para que la igualdad sea cierta:

a. $-45+10-5.2+3.5+1=-118$ b. $-2.50+20-3^2-2+5^3=-465$

5. Completar con $>$, $<$ o $=$ según corresponda:

$-3.(-1+2)^2-5.(-3)$		$-3.(-2-2)$
$-12:4.5$		$-3-(6+4)$
$(-1)^7$		$(5-6)^2$

6. Escribí los números que cumplan con las siguientes condiciones:

a. El opuesto de -7

b. Todos los números enteros mayores que -6 y menores que 2.

c. El opuesto del cubo de -1.

El conjunto de los números racionales [$\mathbb{Q}$]

Los números racionales aparecen muy temprano en la historia de la humanidad. Fueron creados por los antiguos egipcios y los habitantes de Mesopotamia asiática, hace 5000 años o más, pues obviamente las fracciones eran necesarias para dividir tanto las tierras como los alimentos; aunque no conocían a todos los racionales, sino sólo a los positivos.

En el presente los números racionales son definidos como aquellos que pueden obtenerse de un cociente entre dos números enteros, siendo el divisor distinto de cero.

En símbolos:

$$\mathbb{Q} = \{\tfrac{a}{b} \text{ tales que } a \in \mathbb{Z},\ \ b \in \mathbb{Z} \text{ y } b \neq 0\}$$

¿Por qué crees que se excluye al cero del denominador?..

....

Ejemplos:

$\frac{-7}{1} = -7;\quad \frac{10}{2} = 5;\quad \frac{-27}{12} = -\frac{9}{4};\quad \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3};\quad \frac{0}{3} = 0;\quad \frac{1}{-1} = -1$

Hay dos maneras posibles de escribir un número racional: como fracción y como expresión decimal. Si retomamos algunos ejemplos dados tenemos que:

$\frac{-27}{12} = -\frac{9}{4} = -2{,}25;\qquad \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3} = 1,\hat{3}$

Usando la definición podemos justificar si algunos números son racionales o no:

$\frac{7}{3}$ Es racional pues es la división entre el entero 7 y el entero 3.

4 Es racional pues es la división entre el entero 4 y el entero 1.

$\frac{10}{-5}$ Es racional pues es la división entre el entero 10 y el entero -5.

0,3 Es la expresión decimal de un número racional pues es la división entre el entero 3 y el entero 10.

$0,\widehat{5} = 0{,}55555555 \ldots \ldots$ Es la expresión decimal de un número racional pues es la división entre el entero 5 y el entero 9.

$0{,}1\widehat{5} = 0{,}155555555 \ldots \ldots$ Es la expresión decimal de un número racional pues es la división entre el entero 14 y el entero 90.

Los últimos tres ejemplos muestran los tres deferentes tipos de expresiones decimales que puede tener un número racional.

1. Expresión decimal finita: 0,3; -0,17; 12,000742.

2. Expresión decimal periódica pura: $0,\widehat{5};\ 0,\widehat{52}; 1,\widehat{689}$.

3. Expresión decimal periódica mixta: $0{,}2\widehat{5};\ 0{,}12\widehat{52}; 1{,}12\widehat{689}$.

Para escribir un número decimal como fracción se usan algunas reglas prácticas:

- Si la expresión es decimal finita, entonces se escribe el número entero sin la coma, dividido un 1 y tantos ceros como cantidad de números decimales haya.
- Si la expresión es decimal periódica se puede seguir el siguiente razonamiento:

Supongamos que queremos escribir al decimal $0,\widehat{5}$ como fracción, lo llamaremos x.

Entonces, $x = 0,\widehat{5}$.

Si multiplico a x por 10, de forma de correr la coma un lugar me queda que: $10x = 5,\widehat{5}$

Luego restamos $10x - x = 5,\hat{5} - 0,\hat{5}$

$$9x = 5.$$

$$x = \frac{5}{9}$$

Podemos verificar que $\frac{5}{9} = 0,\hat{5}$

Otro ejemplo: Supongamos que queremos escribir al decimal $0{,}1\hat{5}$ como fracción, lo primero que hacemos es llamarlo x.

Entonces, $x = 0{,}1\hat{5}$.

Si multiplico a x por 10, de forma de correr la coma un lugar me queda que: $10x = 1,\hat{5}$.

Luego multiplico a x por 100, obteniendo que: $100x = 15,\hat{5}$

Luego restamos $100x - 10x = 15,\hat{5} - 1,\hat{5}$

$$90x = 14.$$

$$x = \frac{14}{90}$$

Podemos verificar que $\frac{14}{90} = 0{,}1\hat{5}$.

Este mecanismo se traduce en la siguiente regla práctica:

$$\frac{\text{(Todas las cifras de la expresión)} - \text{(las cifras no periódicas de la expresión)}}{\text{Tantos 9 como cifras decimales periódicas y tantos 0 como cifras decimales no periódicas}}$$

Ejemplos:

a) $2,\widehat{3} = \frac{23-2}{9} = \frac{21}{9} = \frac{7}{3}$ **b)** $-15,\widehat{2} = -\frac{152-15}{9} = -\frac{137}{9}$ **c)** $4,\widehat{12} = \frac{412-4}{99} = \frac{408}{99} = \frac{136}{33}$

d) $0,0\widehat{5} = \frac{5}{90} = \frac{1}{18}$ **e)** $-0,4\widehat{6} = -\frac{46-4}{90} = -\frac{42}{90} = -\frac{7}{15}$ **f)** $3,21\widehat{5} = \frac{3.215-321}{900} = \frac{2.894}{900} = \frac{1.447}{450}$

Actividad 3: Operaciones con números racionales.

1. Escribir los decimales en fracción y las fracciones en decimales.

a. $\frac{1}{4} =$ d. $\frac{2}{5} =$ g. $0{,}52 =$ j. $1{,}05 =$

b. $0{,}2 =$ e. $2\,\frac{5}{8} =$ h. $0,\hat{8} =$ k. $0,\widehat{18} =$

c. $\frac{3}{7} =$ f. $\frac{5}{11} =$ i. $3,\widehat{15} =$ l. $2{,}5\hat{2} =$

2. Resolver los cálculos mostrando todos los pasos hechos: (Sin calculadora)

a. $\frac{3}{4} - \frac{1}{3} =$

b. $\frac{\frac{2}{3}+\frac{1}{5}}{\frac{3}{4}+\frac{1}{5}} =$

c. $\left(\frac{3}{5} + \frac{1}{3}\right).\frac{5}{7} =$

d. $\frac{2}{5} : \frac{3}{2} + \frac{1}{3}.\frac{3}{5} =$

e. $0{,}7 : (-2) + 0{,}1.(-0{,}1) =$

f. $10 : \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{3}\right) + 2.(-1{,}4) =$

g. $\left(1,\hat{5} + 0,\hat{1}\right).0{,}6 =$

h. $\left(1{,}3 - 0,\hat{3}\right) : \left(-\frac{1}{6}\right) - 0{,}2 =$

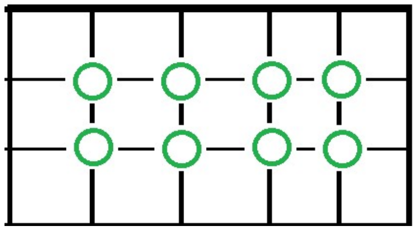
i. $\sqrt{\left(\frac{4}{3} - 1\right).0,\hat{3}}$

j. $\sqrt[3]{1 - \frac{7}{8}} + \left(2.0{,}3 + \sqrt{0{,}04}\right)^{-1}$

3. Un apicultor tiene en el año 2023 una población de 12899 abejas. Cada año la población crece el 32%, ¿Cuántas abejas tendrá en el 2025?

4. Otro apicultor tiene 48700 abejas macho (zánganos) y 41600 hembras (reinas) ¿qué porcentaje de población total de abejas son hembras?

5. En un terreno rectangular de 900m por 660m se quieren plantar pinos. Los pinos se plantan por hileras con una distancia recomendada de 3 metros entre cada uno, como se muestra en el dibujo:



a. ¿Cuántos pinos se pueden plantar en este terreno, siguiendo estas medidas de plantación?
b. El plantador cobra $1280 por hora de trabajo y en una hora planta 200 pinos. ¿Cuánto cobraría por el trabajo en este campo?
c. Si trabaja 8 horas diarias ¿Cuántos días le toma el trabajo?

d. En el vivero de corfone, los pinos limón cuentan $180 cada uno, pero por la cantidad que se va a comprar hacen el 15% de descuento. ¿Cuánto salen finalmente los pinos?

e. El técnico forestal propone agregar 100 gramos de fertilizante en cada planta, El kilo de fertilizante cuesta $128, con un 8% de descuento por pago efectivo y un 4,5% de descuento por pago con débito. Si se paga el abono 40% efectivo y el resto con débito, ¿cuánto paga el propietario del campo por el abono?

Los números irracionales (II)

Actividad 4: Dibujen un cuadrado y una de sus diagonales. Considerando que el lado del cuadrado mide una unidad y, aplicando el teorema de Pitágoras, calculen el valor de la diagonal. ¿Pueden calcularlo con exactitud? ¿Por qué?

El descubrimiento de los irracionales

Los pitagóricos habían supuesto la existencia de una correspondencia uno-uno entre las longitudes de los segmentos de líneas rectas y los números racionales.
Según el teorema de Pitágoras, "en todo triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos". De aquí se desprende que, si el triángulo es isósceles, la hipotenusa es inconmensurable, por ejemplo, si los catetos miden 1, la hipotenusa mide $\sqrt{2}$.
Este segmento es inconmensurable porque "no se puede medir" con los números racionales, ninguna unidad racional, por pequeña que sea, sirve para hacerlo. Es probable que al calcular la diagonal de un cuadrado de lado igual a 1 los griegos se toparan con este número- ni natural ni racional- que tampoco puede expresarse como el cociente de dos números enteros, lo que dio lugar a la denominación de número irracional.

¿Qué es un número irracional? Es aquel número que no puede ser expresado como cociente de dos números enteros y su expresión decimal tiene una cantidad infinita de cifras decimales no periódicas.
Ejemplos:

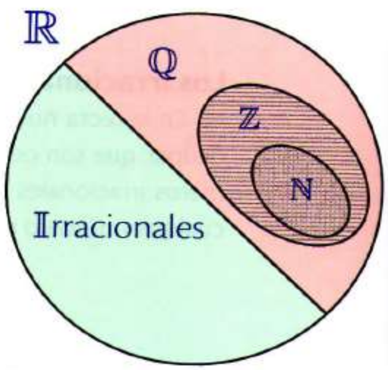
- Todas las raíces de números enteros, no exactas, son irracionales.

$\sqrt{3} = 1{,}7320508 \dots ....$ $\sqrt{2} = 1{,}414213562 \dots \dots \dots ..$ $\sqrt[3]{10} = 2{,}15443469 \dots \dots ....$

- El número $\pi = 3{,}141592654 \dots \dots ....$

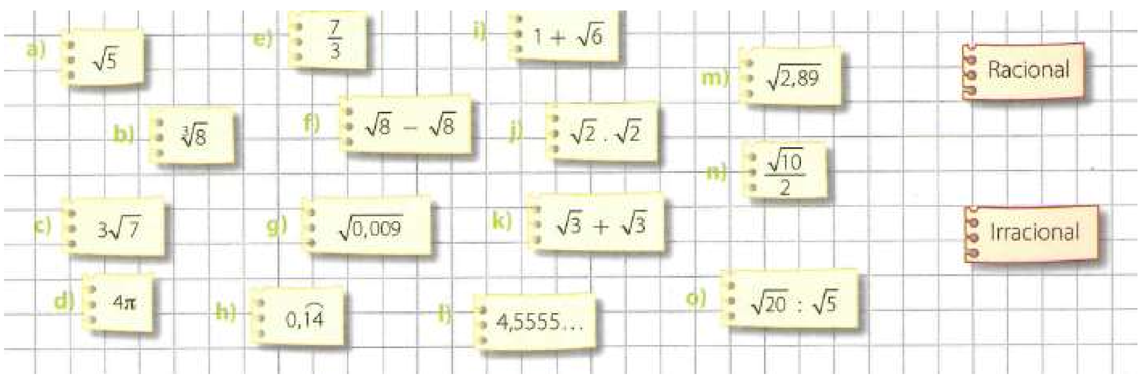
Con este nuevo conjunto numérico, se terminan de formar los números reales.

Números Reales ($\mathbb{R}$) Es el conjunto de números formados por los números racionales y los números irracionales.



Actividad 5:

1. Unir según corresponda en cada caso.



2. Ubicar 3 números irracionales entre estos números:

a. 15 y 15,1. b. 0,5 y 0,51. c. -6,4 y -6,3. d. $\sqrt{2}$ y $\frac{3}{2}$.

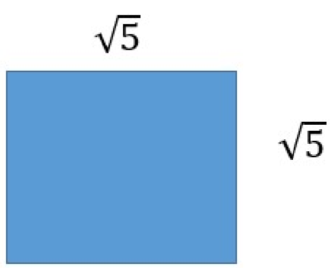
3. Considerando los conjuntos de números que ya conocemos, existen entre ellos las siguientes relaciones: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$; esto significa que los naturales están contenidos en los enteros, éstos en los racionales y el conjunto de los racionales está incluido en los reales.

Completar la siguiente tabla, con si o no, según corresponda:

Número	7	$\sqrt{10}$	-2,08	$1{,}123\hat{4}$	$-\frac{\sqrt{5}}{2}$	$14,\hat{3}$	0	π	$\sqrt{9}$
¿Natural?									
¿Entero?									
¿Racional?									
¿Irracional?									

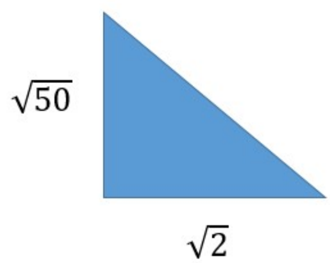
4. Calcular el área y perímetro de las figuras y definir si cada resultado obtenido es un racional o un irracional.

a.



Los dibujos no están a escala

b.



5. Hallar dos números irracionales diferentes x e y tales que $\frac{x}{y}$ sea racional.

6. ¿Es posible multiplicar a un número racional por un número irracional y que el resultado sea un racional?

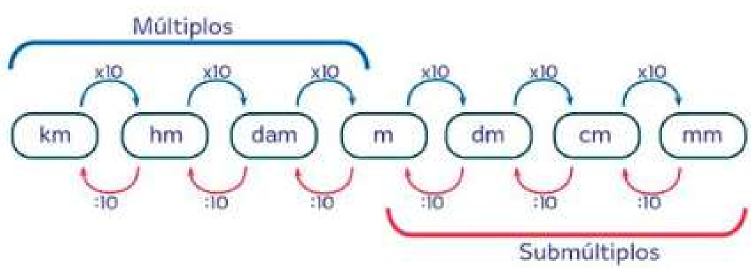
Geometría

Muchas veces necesitamos resolver problemas agronómicos que involucran el cálculo de perímetros y áreas de figuras planas. Por ejemplo, determinar la cantidad de alambrado que se necesita para rodear un cuadro o determinar de qué superficie se dispone para la planificación de alguna actividad.

Perímetro

Medir una longitud significa compararla con otra considerada como unidad de medida. Por ejemplo, si la longitud de un segmento es 8 cm, significa que el centímetro está contenido 8 veces en el largo del segmento.

El metro como unidad patrón fue el uso obligatorio a partir de la Primera Conferencia Internacional de Pesas y Medidas del año 1889. Desde 1983 la definición de metro está basada en la velocidad de la luz: un metro es el trayecto recorrido por la luz en el vacío durante $\frac{1}{299792458}$ segundos.



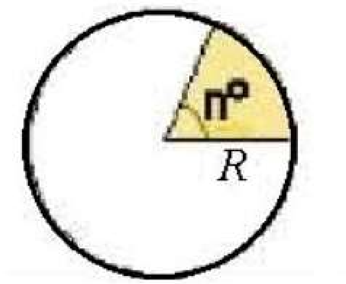
El perímetro de una figura es la longitud del contorno. Para calcular el perímetro todo tiene que estar expresado en la misma unidad de medida.

La circunferencia

El número π (pi) indida la cantidad de veces que está contenido el diámetro de una circunferencia en su longitud o perímetro.

$$longitud\ de\ la\ circunferencia = \pi.\, diámetro = \pi.\, 2.\, radio = 2\pi r$$

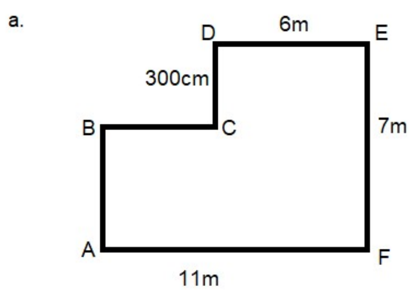
Sector Circular

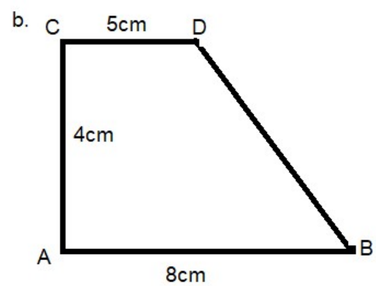


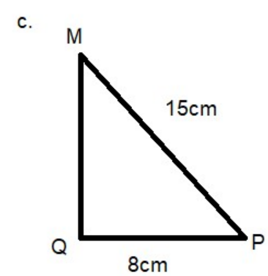
$$P = \frac{2.\pi \cdot R \cdot n}{360}$$

Actividad 6:

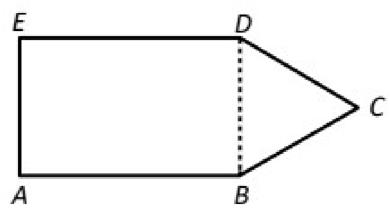
1. Realizar las operaciones siguientes, siempre en la misma unidad de medida.
   a. $0{,}98hm + 12{,}3m + 1234cm = \qquad m$
   b. $0{,}00067km - 45637mm + 67dm = \qquad dm$
   c. $234678mm - 456cm = \qquad m$
2. Calcular el perímetro de las figuras:



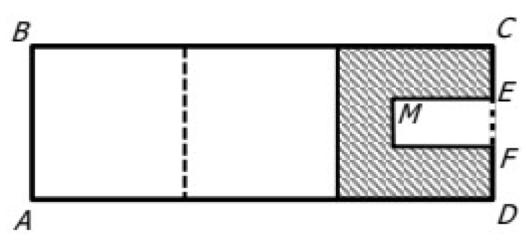




3. ABCD es un rectángulo. BCD es un triángulo equilátero. El perímetro del polígono ABCDE es de 456 m. Si $\overline{BC} = 68m$ ¿cuál es la longitud de $\overline{AB}$?



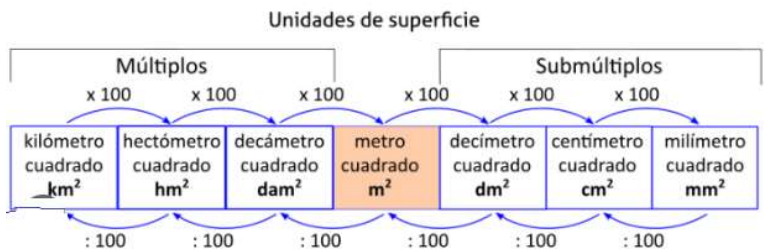
4. El rectángulo $ABCD$ tiene $48cm$ de perímetro y está formado por 3 cuadrados iguales. $\overline{EM} = 2.\overline{CE}$. ¿Cuál es el perímetro de la figura rayada?

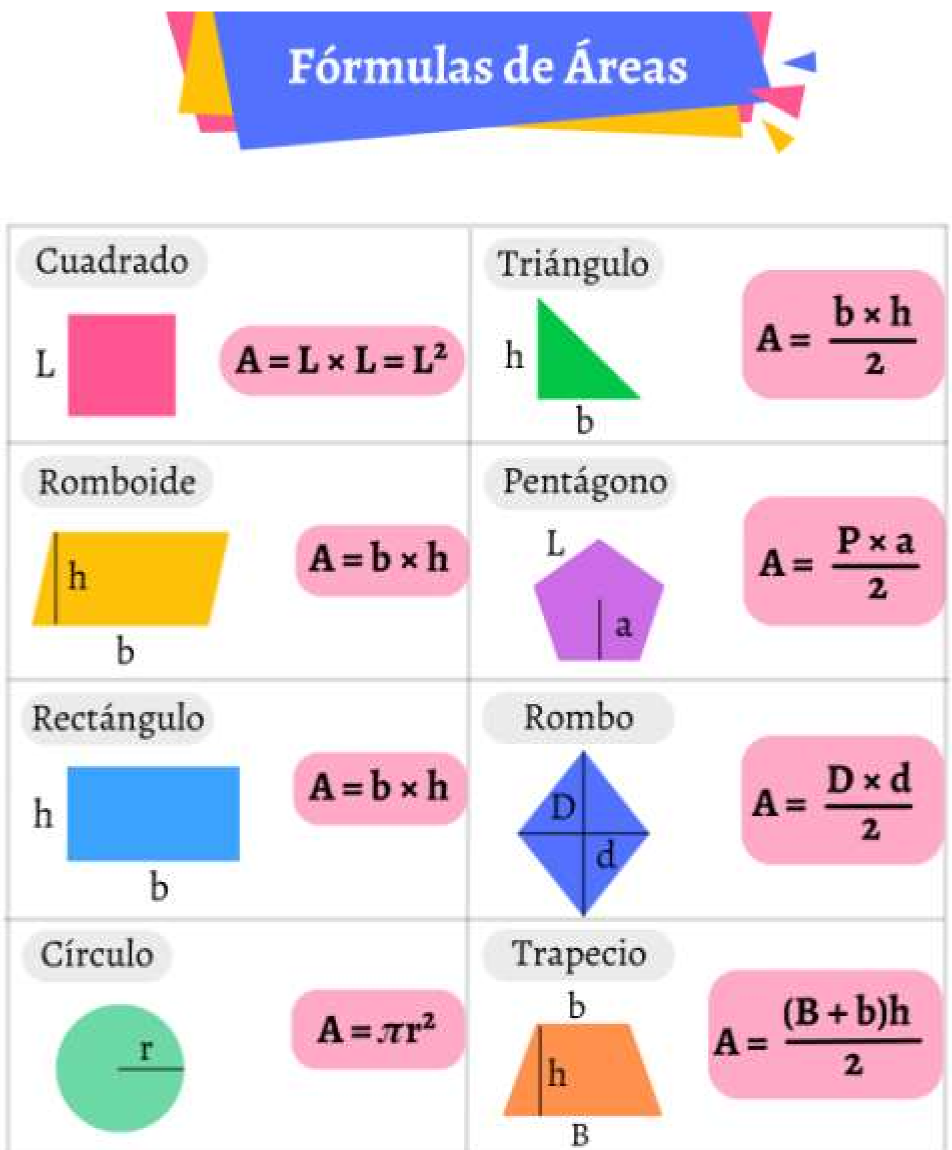


5. Calcular el radio del círculo de perímetro 106,76cm

Área

Se llama área a la cantidad de veces que entra en una superficie la unidad de medida elegida. Un cuadrado de 1 metro de lado tiene área igual al $1m^2$.





Actividad 7:

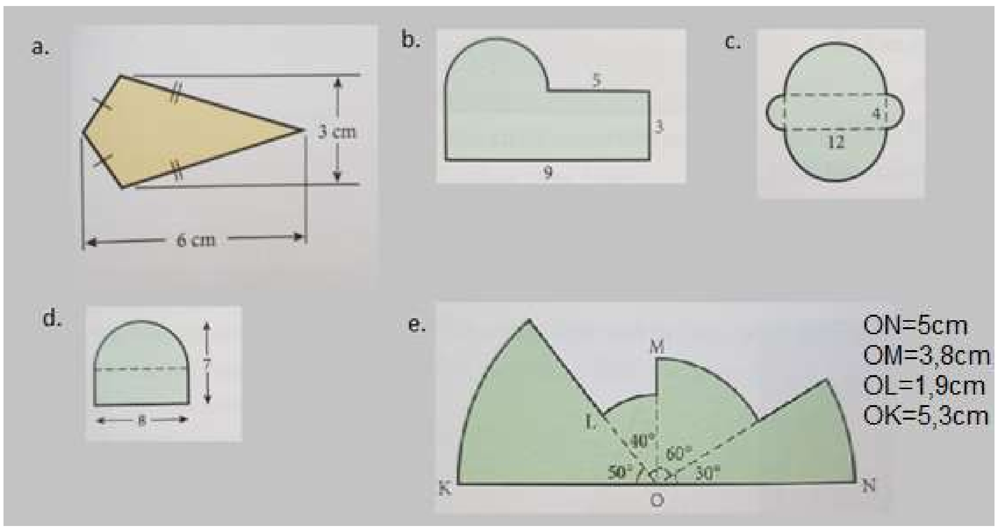
1. Expresar en la unidad de longitud indicada:

a. $35m^2 = \qquad cm^2$

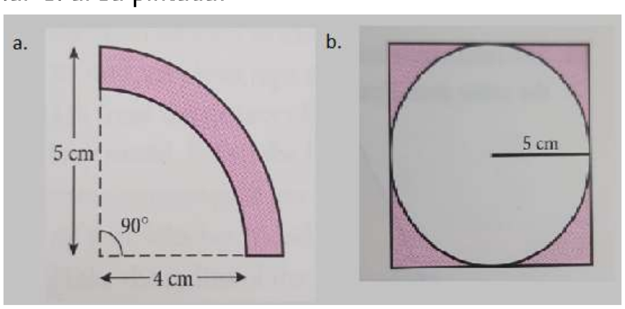
b. $45634\ mm^2 = \qquad dm^2$

c. $0{,}2\ mm^2 = \qquad cm^2$

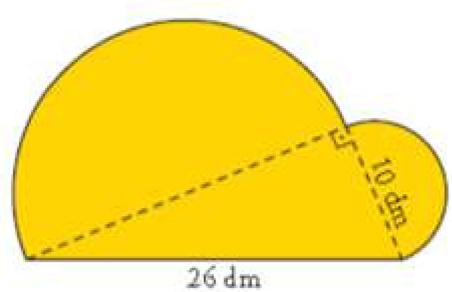
2. Calcular el área de las siguientes figuras

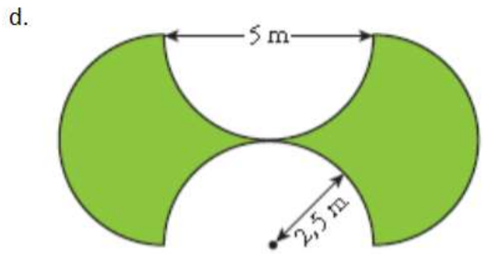


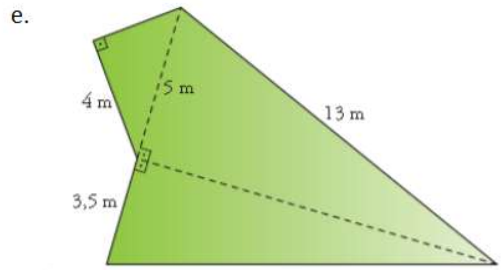
3. Hallar el área pintada:



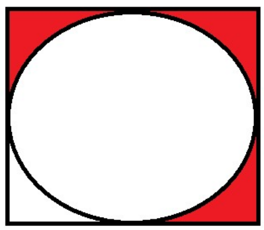
c.



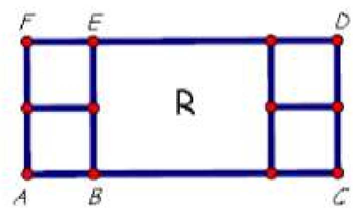




4. Calcular el área pintada, sabiendo que el área del cuadrado es $144cm^2$



5. El rectángulo ACDF está partido en un rectángulo R y 4 cuadraditos iguales.



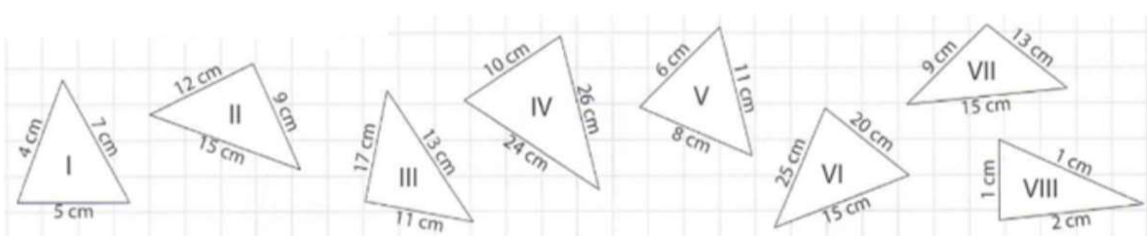
Perímetro de un cuadradito=5,2 dm

Perímetro de ACDF= 1,74 m

a. ¿Cuánto miden los lados del rectángulo R?

b. ¿Cuál es el perímetro de BCDE?

6. ¿Cuáles de estos triángulos son rectángulos? Justificar con el teorema de Pitágoras.



7. Olivia, Emma, Nahuel y Pedro descargaron a sus celulares una aplicación que calcula la cantidad de metros al caminar. Un día lo probaron durante el recorrido desde la casa de cada uno hasta la escuela y recolectaron estos datos:

Olivia caminó 333m haca el sur y 644m hacia el oeste.

Emma caminó 627m hacia el norte y 364m hacia el este.

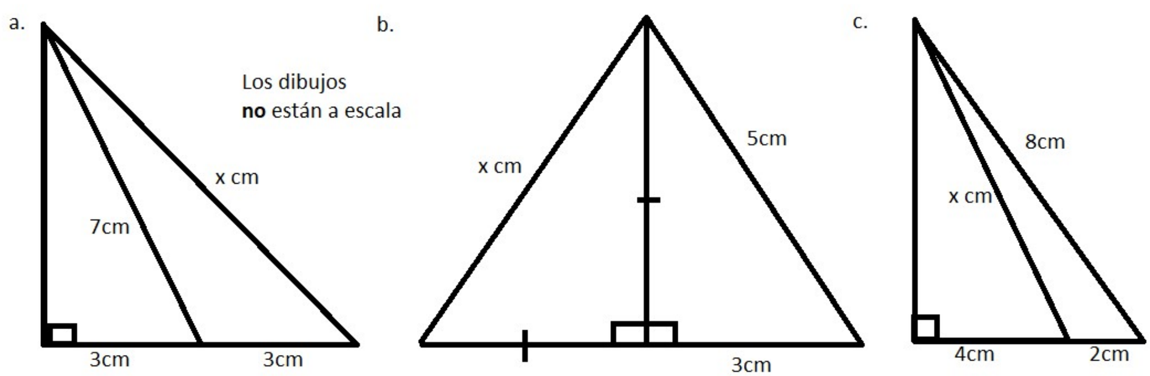
Nahuel caminó 231m hacia el sur y 160m hacia el este.

Pedro caminó 27m hacia el norte y 364 hacia el este.

a- Olivia realizó algunos cálculos y le dijo a Emma que las dos vivían a la misma distancia de la escuela. Emma le respondió que eso era imposible porque ella caminó más. ¿Estás de acuerdo con Emma o con Olivia?

b- Nahuel también hizo algunos cálculos y le dijo a Pedro que su casa estaba más cerca de la escuela que la de él. Pedro le dijo que era imposible porque caminaron lo mismo. ¿Estás de acuerdo con Nahuel o con Pedro?

8. Hallar la medida del lado x. Luego el área y perímetro de las figuras.



Cuerpos

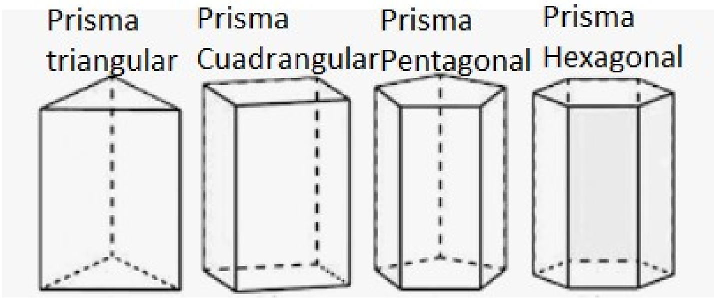
Nuestro mundo es en tres dimensiones, es decir, los objetos tienen largo, ancho y alto. El estudio de los cuerpos simples sirve de base para luego combinarlos y obtener las más diversas formas. Formas que se tienen en cuenta, por ejemplos para la fabricación de objetos tecnológicos. Los griegos se dedicaron a estudiar propiedades de los cuerpos y los relacionaron con elementos como el fuego y la tierra.

Clasificación de los cuerpos

Poliedros: Son los cuerpos que tienen todas sus caras planas y se clasifican en **PRISMAS** y **PIRÁMIDES**. Para nombrar un poliedro, primero se escribe su nombre (prima o pirámide) y luego el nombre del polígono que corresponde a su base.

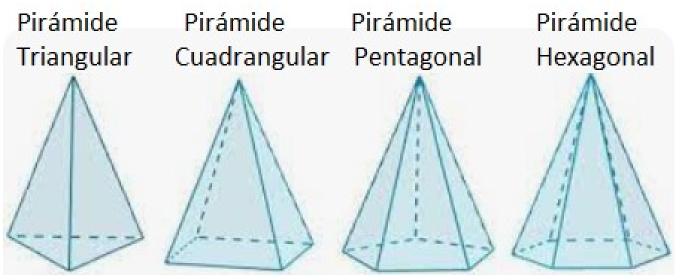
PRISMA

Tienen dos caras paralelas y sus caras laterales son paralelogramos.



PIRÁMIDE

Tienen una sola base y sus caras laterales son triángulos equiláteros.



CUERPOS REDONDOS

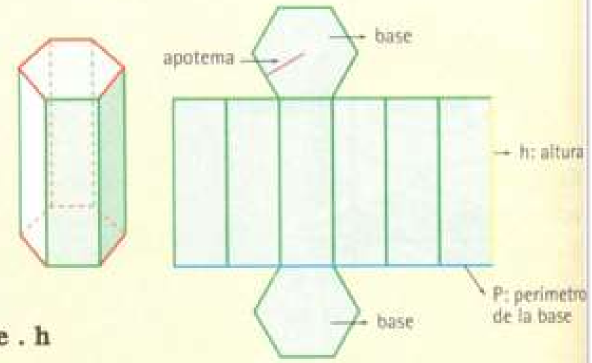
Son los cuerpos que tienen al menos una cara no plana y pueden rodar en alguna posición.

Área Lateral y Total

El área lateral de un cuerpo se obtiene sumando las áreas de sus caras laterales. El área total de un cuerpo se obtiene sumando las áreas de las bases con las áreas de las caras laterales.

ÁREA DEL PRISMA

El área total del prisma (A_T) es igual a la suma del área lateral y las áreas de las bases.



En el desarrollo del prisma podemos observar que las caras laterales forman un rectángulo cuya base es el perímetro de la base del prisma y cuya altura es la altura del prisma; por lo tanto:

Área lateral del prisma (A_L) = perímetro de la base . h

Llamamos A_B al área de la base.

Entonces : $\boxed{A_T = A_L + 2 \cdot A_B}$ — Área total del prisma

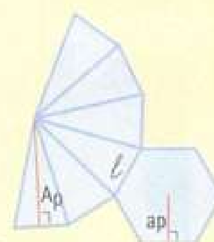
ÁREA DE LA PIRÁMIDE

El área total de una pirámide se obtiene sumando las áreas de todas las caras que la forman.

Vamos a hallar una fórmula para las pirámides regulares, que son aquellas cuya base es un polígono regular que tiene como centro el pie de la altura.

Las caras de la pirámide son triángulos isósceles iguales, cuya base es el lado (ℓ) del polígono de la base y cuya altura es la apotema lateral (Ap) de la pirámide. Si la pirámide tiene **n** caras laterales, el área lateral es:

$$A_L = n \cdot \frac{\ell \cdot Ap}{2} = \frac{n \cdot \ell \cdot Ap}{2} = \frac{\text{perímetro de la base} \cdot Ap}{2}$$



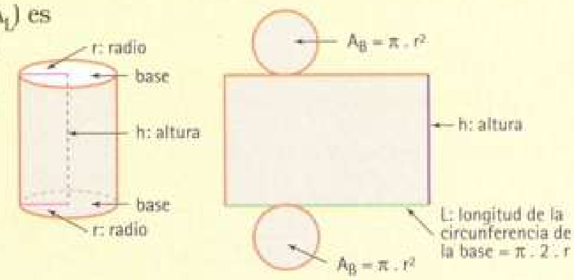
Entonces, $\boxed{A_T = A_L + A_B}$ — Área total de la pirámide regular

$$A_T = \frac{\text{perímetro de la base} \cdot Ap}{2} + \frac{\text{perímetro de la base} \cdot \text{ap de la base}}{2}$$

ÁREA DEL CILINDRO

Desarrollamos un cilindro de radio **r** y altura **h** para encontrar la fórmula de su área total.

En el desarrollo observamos que el área lateral (A_L) es un rectángulo cuya base es la longitud de la circunferencia de la base del cilindro y cuya altura es la altura del cilindro; entonces:



$A_L = \pi . 2 . r . h$

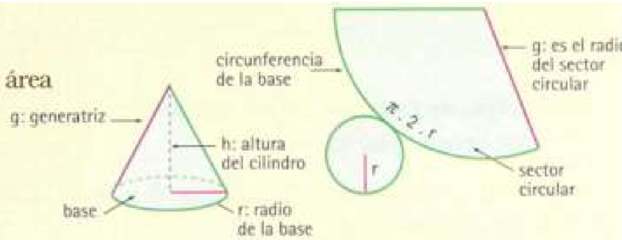
El área de cada base es: $A_B = \pi . r^2$

Por lo tanto, el área total del cilindro es:

$\boxed{A_T = A_L + 2 . A_B = \pi . 2 . r . h + 2 . \pi . r^2}$ — Área total del cilindro

ÁREA DEL CONO

Desarrollamos un cono y observamos que su área lateral (A_L) es el área de un sector circular.



El área de un sector circular es:

$$\frac{\text{longitud del arco . radio}}{2}$$

En nuestro caso, el arco es la longitud de la circunferencia de la base del cono y el radio del sector circular es la generatriz del cono. Entonces:

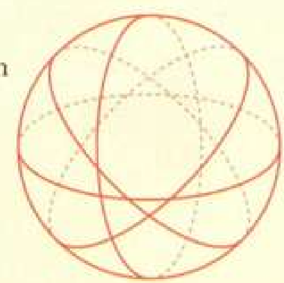
$$A_L = \frac{\pi . \cancel{2} . r . g}{\cancel{2}} = \pi . r . g$$

El área de la base es: $A_B = \pi . r^2$

Por lo tanto, el área total del cono es: $\boxed{A_T = A_L + A_B = \pi . r . g + \pi . r^2}$ — Área total del cono

ÁREA DE LA ESFERA

Si bien no podemos desarrollar una esfera, es posible demostrar que con cuatro de sus círculos máximos podemos cubrirla exactamente.



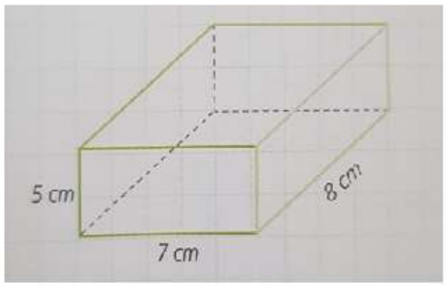
El área de cada uno de los círculos máximos es $\pi . r^2$; por lo tanto, el área de la esfera es:

$\boxed{A_T = 4 . \pi . r^2}$ — Área total de la esfera

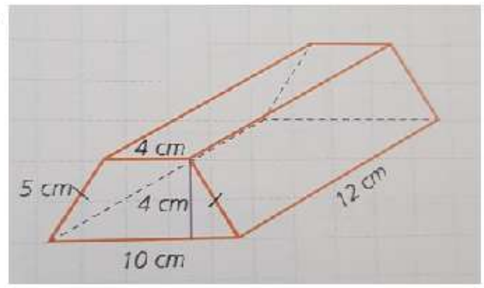
Actividad 8:

1. Calcular el área lateral y total de cada cuerpo

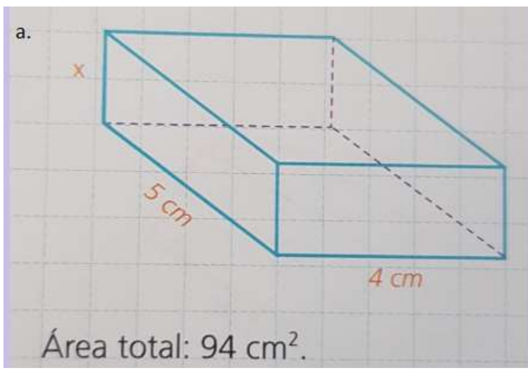
a.

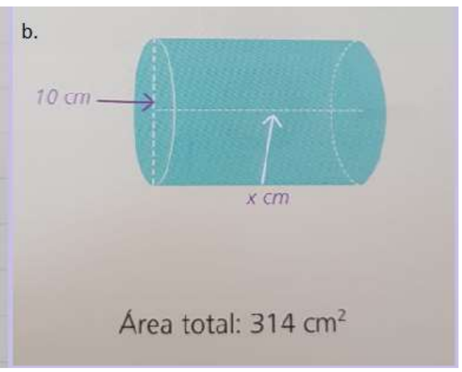


b.



2. Hallar el valor de x





Volumen

Medir una cantidad de volumen significa compara dicha cantidad con otra tomada como unidad de medida. El metro cúbico es el volumen de un cubo de 1 metro de arista.

Múltiplos y submúltiplos del metro cúbico:

Múltiplos y submúltiplos del metro cúbico

	Unidad	Símbolo	Equivalencia
Múltiplos	Kilómetro cúbico	Km^3	$=1.000.000.000\ m^3$
	Hectómetro cúbico	hm^3	$= 1.000.000\ m^3$
	Decámetro cúbico	dam^3	$= 1.000\ m^3$
Ud. principal	Metro cúbico	m^3	$= 1\ m^3$
Submúltiplos	Decímetro cúbico	dm^3	$= 0{,}001\ m^3$
	Centímetro cúbico	cm^3	$= 0{,}000001\ m^3$
	Milímetro cúbico	mm^3	$= 0{,}000000001\ m^3$

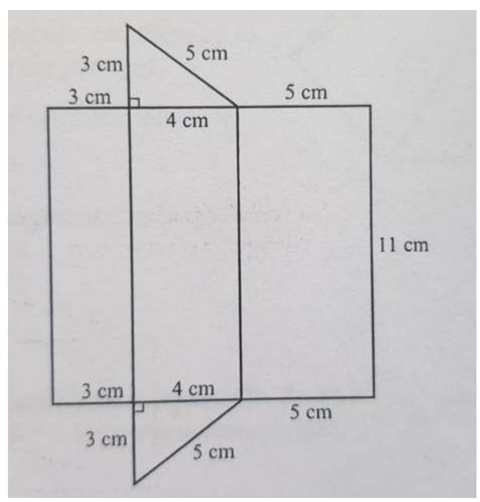
Fórmulas de volumen

CUERPO	VOLUMEN
PRISMA RECTO	$\acute{a}rea\ de\ la\ base * altura$
CILINDRO	$\pi . r^2 . altura$
PIRÁMIDE	$\frac{1}{3} . \acute{a}rea\ de\ la\ base . altura$
CONO	$\frac{1}{3} . \pi . r^2 . altura$
ESFERA	$\frac{4}{3} . \pi . r^3$

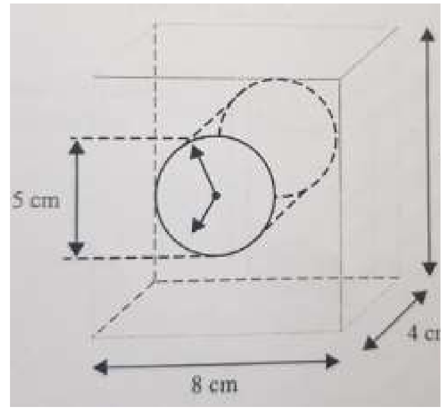
Actividad 9:

1. Resolver los siguientes problemas:
   a. Un silo tiene forma cilíndrica con un diámetro de 4m. Si tres cuartos de su capacidad, contiene $75{,}63m^3$ de harina, ¿qué altura tiene el silo?
   b. El volumen de un cono es $468{,}91cm^{\ 3}$ y el diámetro es de $16cm$. ¿qué altura tiene el cono?

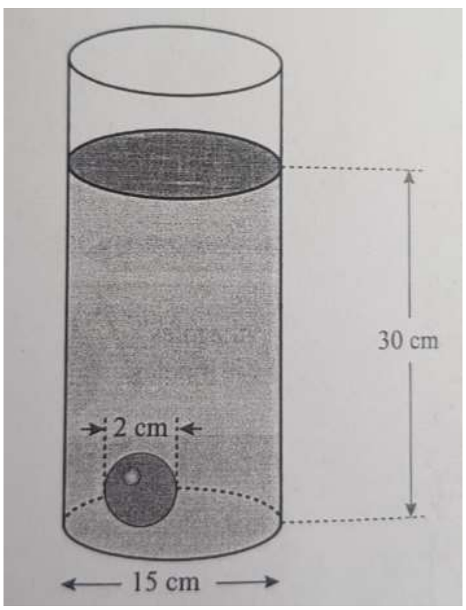
2. Calcular el área y perímetro de la figura. Luego hallar el volumen del sólido que se forma si recortamos la figura y armamos el cuerpo. ¿Cómo se llama el cuerpo que se forma?



3. El diagrama muestra una caja de vidrio macizo para un reloj. La caja es un prisma al que se le ha quitado un cilindro (para encajar en el mecanismo del reloj). Calcular el volumen de vidrio necesario para hacer la caja del reloj.



4. El diagrama muestra un tubo casi lleno de agua, el tubo contiene una pelotita de 2cm de diámetro. Encontrar el volumen de agua que hay en el cilindro.



Punto 4

Expresiones Algebraicas

Mucho antes de conocer el nombre expresiones algebraicas, trabajamos con ellas. Se llaman así a las expresiones en las cuales hay operaciones indicadas entre números y letras.

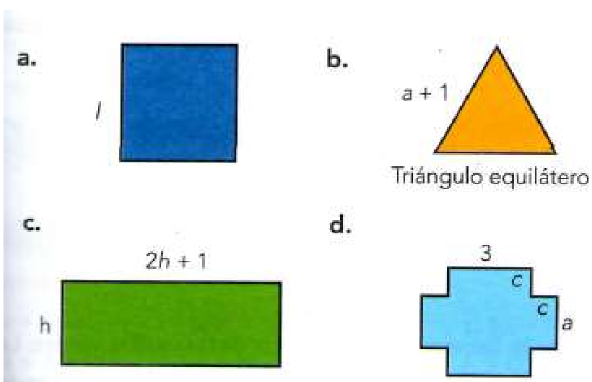
Toda fórmula presenta una expresión algebraica y las estudiamos aplicadas a distintas situaciones desde los primeros grados, (basta mencionar, por ejemplo, la del perímetro del cuadrado: P=4.l)

Si trabajamos en Matemática pura, no buscamos un significado en particular para las letras. No obstante, cuando aplicamos la matemática a una situación concreta, cada letra tiene un significado especial.

Para resolver algunos problemas de la vida cotidiana y, sobre todo, para trabajar en otras ramas del conocimiento, es necesario saber manejar el lenguaje matemático.

Actividad 10:

1. Encuentren una expresión del perímetro de cada una de estas figuras.



2. La base de una estatua es rectangular. El largo de la base es el triple del ancho. Se desea construir a su alrededor un cerco, también rectangular, donde el ancho es el doble del ancho de la estatua y se mantiene la proporción de la misma. Se deja un paso de dos metros frente a la estatua, como muestra el esquema.

a. Llamando x al ancho de la estatua, encuentren una fórmula para expresar la cantidad de barrotes que tendrá el cerco, si sabemos que por cada metro hay 10 de ellos.

b. Si el largo de la base de la estatua es de 6 metros ¿Cuál es la cantidad mínima de barrotes que usarán?

Valor Numérico

Una expresión algebraica toma un valor numérico si se dan valores a sus letras, a las que llamaremos variables.

Ejemplo: Dada $a^2.b - a.b$, vamos a calcular su valor numérico para $a = \frac{1}{2}$ y $b = 2$.

Al reemplazar cada variable por el valor que se le asigna, en la expresión original se obtiene:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2.2 - \frac{1}{2}.2 = \frac{1}{4}.2 - 1 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$

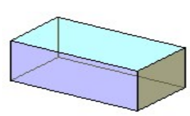
Otro ejemplo: El volumen del cilindro es $V = \pi.r^2.h$, o sea, una expresión algebraica.

Las latas de conservas (tomates, arvejas, etc.) son cilíndricas y sus medidas son de alrededor de 10 cm de altura y 6 cm de diámetro de la base.

Para calcular su volumen hallaremos el valor numérico de $\pi.r^2.h$ para h=10cm y r = 3cm.

3,14. $9cm^2$.$10cm$ = $282{,}6cm^3$. Luego el volumen de una lata de conservas es $282{,}6cm^3$

Actividad 11:

1. Para calcular el volumen de un paralelepípedo 

Se multiplica el área de su base por la altura.

a. Escriban la fórmula correspondiente.
b. Hallar la altura de un paralelepípedo cuya área de la base es 45 m^2 y su volumen es 360 m^3.

2. Calculen el valor numérico de cada expresión:

a. $a^2 - \frac{1}{4}b + \frac{1}{2}b^2$ para $a = -\frac{5}{2}$ y $b = \frac{1}{2}$

b. $\frac{1}{3}xz + \frac{2}{x+3}$ para $x = -3$ y $z = -1$

3. Completen la tabla.

m	p	$(-m+2p)^2$	$(m+p).(m-p)$
$-1/4$	-3		
9	-5		
$2/3$	-4		

4. Al realizar algunas operaciones es necesario saber cuánta sangre bombea el corazón del paciente. Esta variable depende de la superficie corporal.

Un corazón normal bombea 2400 litros por metro cuadrado de superficie por minuto. La superficie corporal de una persona se calcula según su peso, con la siguiente fórmula: $S = \frac{4p+7}{p+90}$.

El segundo miembro de la igualdad es una expresión algebraica, al reemplazar p por el peso (en kg) de una persona, el valor numérico que se obtiene es su superficie corporal. (en metros cuadrados)

a. ¿Cuál es la superficie corporal de un adulto que pesa 75 kg?
b. ¿Cuál es la superficie corporal de un bebe que pesa 6 kg?

Algunas Operaciones con expresiones algebraicas

Consideremos la expresión algebraica $2\mathrm{m} - 3\mathrm{p} + 5\mathrm{mp}$ y analizamos sus elementos:

- Esta expresión tiene tres términos: $2m, \ -3p \ y \ 5mp$
- Cada uno está formado por un coeficiente y una parte literal:

En el término $2m$, el coeficiente es 2 y la parte literal m;

En el término $-3p$, el coeficiente es: -3 y la parte literal es: p

En el término $5\mathrm{mp}$, el coeficiente es: 5 y la parte literal es: mp

Términos Semejantes: Son aquellos que tienen la misma parte literal.

Ejemplo: en la expresión $6x^2 - 8xz + 3x^2 - z^2 + 2xz$

Los términos $6x^2$ y $3x^2$ son semejantes.

¿Hay algún par más de términos semejantes?.......................................

Indiquen, en las siguientes expresiones algebraicas, qué términos son semejantes:

a) $2xz + 3x^2 + 2z - \frac{1}{2}x^2 + 6zx$ b) $\frac{2}{3}t.m + 2m - 3t + 5t + tm - 2t$

Suma Algebraica

Para sumar o restar expresiones algebraicas se suman o se restan sus términos semejantes.

Ejemplo: Un comerciante desea hacer un inventario para saber cuántas remeras, camperas y polleras tiene para la temporada que se inicia. El local de su negocio cuenta con 14 remeras, 8 camperas y 10 polleras. En el depósito cuanta con 24 remeras, 12 camperas y 6 polleras.

Para realizar la suma, escribe: 14r+8c+10p+24r+12c+6p

Agrupa y suma los términos semejantes: (14r+24r)+(8c+12c)+(10p+6p)

Y eso le da: 38r +20c +16p.

Es decir que el resultado del inventario es 38 remeras, 20 camperas y 16 polleras.

Para sumar (o restar) términos semejantes, se suman (o restan) los coeficientes y se conserva al parte literal.

Si los términos no son semejantes, la suma o la resta se dejan indicadas, pero no se resuelven.

Ejemplos:

$8m^2 - 2mp - 3m^2 + mp =$

$\frac{2}{3}a - \frac{1}{5}ab + 2ab - a =$

Multiplicación

Para obtener el producto de dos términos, se calcula el producto de los coeficientes y el producto de las partes literales.

Ejemplos:

$$\frac{1}{2}m.\frac{3}{5}p = \frac{3}{10}mp$$

$$3y^3(-2yx^2) = -6y^4x^2$$

Al multiplicar potencias de igual base se suman los exponentes: $x^m.x^n = x^{m+n}$ **.**

Si las expresiones tienen más de un término, se aplica la propiedad distributiva.

Ejemplos:

$$2ab\left(a^2 - \frac{2}{3}ab\right) = 2a^3b - \frac{4}{3}a^2b^2$$

$$\left(-2x + \frac{1}{2}y\right).(4x - 1) = -8x^2 + 2x + 2xy - \frac{1}{2}y$$

Actividad 12:

1. Resolver las siguientes sumas algebraicas

   a. $-2pq + p^3 - \frac{1}{2}p^3 - qp =$

   b. $\frac{3}{5}a^2 + \frac{1}{3}\mathrm{b} - \frac{3}{10}a^2 + \frac{5}{6}\mathrm{b} =$

   c. $3\mathrm{xy} - 2y^2\mathrm{x} - 5\mathrm{x}y^2 - 3\mathrm{x}$

   d. $-\frac{3}{7}xy - \frac{2}{5}y + 5x + 2yx - 4y + 3 =$

2. Resolver las operaciones y dejar la mínima expresión:

   a. $m.p.m^2.p^3 =$

   b. $\frac{1}{2}a^4(-2a^3n).3 =$

   c. $-3(a - 3n) + 3a(1 - n) =$

   d. $(-2x - 1)(2x + 3) =$

   e. $-4(3e - 5) - (2e + e^2) - 2x =$

   f. $xy(x^2 - y + xy) =$

   g. $(7 - 2xy)(x + y) =$

Productos Especiales

Cuadrado de un binomio:

Una expresión algebraica de dos términos se llama BINOMIO. El cuadrado de un binomio son ambos términos elevados al cuadrado.

$$(a+b)^2$$

Vamos a desarrollar la expresión:

Por definición de potenciación: $(a+b)^2 = (a+b).(a+b)$

Aplicamos la propiedad distributiva: $= a.a + a.b + b.a + b.b$

Realizamos las operaciones indicadas: $= a^2 + 2.a.b + b^2$

Por los tanto:

$$\boldsymbol{(a+b)^2 = a^2 + 2.a.b + b^2}$$

El cuadrado de un binomio es igual al cuadrado del primer término, más el doble producto de ambos términos, más el segundo término al cuadrado.

Ejemplo:

Para calcular: $(2m+p)^2$ podemos usar la propiedad distributiva o la fórmula hallada.

Si usamos la fórmula:

$$(2m+p)^2 = (2m)^2 + 2.2.m.p + p^2 = 4m^2 + 4mp + p^2$$

El producto de una suma por una diferencia

$$(a+b).(a-b) = a^2 + ab - ab - b^2 = a^2 - b^2$$

Es decir:

$$\boldsymbol{(a+b).(a-b) = a^2 - b^2}$$

El producto de dos términos, sumados y restados, da como resultado, la resta de los cuadrados de ambos términos.

¿Cómo usamos eso para obtener el producto de: $(2x+b).(2x-b)$?

$$(2x+b).(2x-b) = 4x^2 - b^2$$

Actividad 13:

1. Calcular los cuadrados de estas sumas realizando el desarrollo analítico correspondiente.

a. $(m+3s)^2 =$ b. $(3a+2b)^2 =$ c. $(x+\frac{1}{2}y)^2 =$ d. $(2a+b)^2 =$

2. Utilicen la fórmula para hallar los cuadrados de estas expresiones:

a. $(x+y)^2 =$ b. $(\frac{2}{3}m+\frac{1}{4}y)^2 =$ c. $(2b+0{,}6a)^2 =$ d. $(x-2y)^2 =$

e. $(5m^3-2)^2 =$ f. $(-2b-5c)^2 =$ g. $(2m-s)^2 =$ h. $(\frac{1}{3}m-s^2)^2 =$

3. Resolver usando la fórmula:

a. $(5a-3).(5a+3) =$ b. $(m+p^2).(m-p^2) =$ c. $\left(\frac{1}{2}+x\right).\left(\frac{1}{2}-x\right) =$

4. Escriban en símbolos y luego resuelvan:

a. El cuadrado de un medio de eme al cubo más equis.

b. La suma de eme al cuadrado y ene, por la diferencia de estos mismos términos.

c. El cuadrado de la suma de un número entero y su consecutivo.

d. La diferencia entre el cuadrado del anterior de un número entero y su mitad.

5. Efectúen las operaciones efectuadas.

a. $2x^2-(x+y)^2+2xy =$

b. $2.(m+q)^2-3.(m-q)^2 =$

c. $3a^2-\left(a+\frac{2}{3}\right).\left(a-\frac{2}{3}\right) =$

$d. (3a-\frac{2}{5}b+b-\frac{3}{2}a)^2 =$

e. $\left(\frac{1}{2}-x\right)^2-(x+1)^2 =$

$f. \frac{5}{2}xy+(2x-3y)^2-\frac{5}{3}x^2 =$

Expresiones Algebraicas Racionales

Una expresión algebraica racional es aquella que es la división entre dos expresiones algebraicas.

Veamos un ejemplo: $\frac{2x^3y^2}{xy}$

Estas expresiones algebraicas racionales pueden ser simplificadas:

Para ello aplicamos la propiedad del cociente de potencias de igual base: $\frac{x^m}{x^p} = x^{m-p}$

Resolvemos la división anterior teniendo en cuenta esta propiedad:

$$\frac{2x^3y^2}{xy} = 2x^2y$$

Ejemplo 2: $\frac{-2a^2b^4}{5a^3b^2}$ =

Producto y División de expresiones algebraicas racionales

Para multiplicar o dividir dos expresiones algebraicas racionales, se debe tener en cuenta el producto y la división de fracciones.

Recordando:

$$\frac{a}{b}.\frac{c}{d} = \frac{a.c}{b.d}$$

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d} = \frac{a.d}{b.c}$$

Ejemplos con expresiones algebraicas racionales.

$$\frac{3.x^2}{y}.\frac{y^3}{x} = \frac{3.x^2.y^3}{y.x} = 3.x.y^2$$

$$\frac{2.x^2}{y}:\frac{2x}{5.y^3} = \frac{2.x^2.5.y^3}{y.2.x} = \frac{10.x^2.y^3}{2.y.x} = 5.x.y^2$$

Suma y resta de expresiones algebraicas racionales

Para sumar o restar expresiones algebraicas racionales debemos tener el mismo denominador, si no es el caso, hay que buscar fracciones equivalentes que tengan el mismo denominador, luego se suman o se restan los numeradores.

Ejemplos:

$$\frac{a}{b}+\frac{1}{b}=\frac{a+1}{b}$$

$$\frac{3}{a}-\frac{x}{b}=\frac{3.b}{a.b}-\frac{x.a}{b.a}=\frac{3.b-x.a}{a.b}$$

Actividad 14:

1. Realicen las simplificaciones que sean posibles:

a. $\frac{3ab}{b}=$ b. $\frac{-x^5y^2}{4x^3y^3}=$ c. $\frac{-2m^2p^3}{m.p^2}=$ d. $\frac{8m^3p^2}{2m^3p^3}=$

2. Resolver los productos y las divisiones, dejar lo más simplificado posible.

a. $\frac{2}{x}-\frac{4}{5x}=$ b. $\frac{x-2}{4}.\frac{3+x}{2}=$ c. $\frac{3}{a-b}:\left(-\frac{2}{a}\right)=$ d. $\frac{1}{a}+\frac{3}{a^2}$ e. $-\frac{b}{2}-\frac{3b}{3}=$

Bibliografía:

- Las geometrías, Juan Pinasco, Pablo Amster, colección las cs naturales y la matemática, 2009.
- Los números, de los naturales a los complejos, Maías Graña, Gabriela Jerónimo, colección las cs naturales y la matemática, 2010.
- Precálculo-Jamen Stewart-Ed Thompson.
- Matemática 1 “modelos matemáticos para interpretar la realidad” Ma. Beatriz Camuyeano-Ed estrada.
- Matemática 2, Ed Santillana, 2007.
- Funciones elementales para construir modelos matemáticos- mg Mónica Bocco. Colección: las cs naturales y la matemática.
- Math Igcse, Ed Oxford. David Rayner.